C12 Modalidad a Distancia - Virtual

Matemática

Guía de Estudio para Examen de Ubicación

10mo EGBS

Contenido

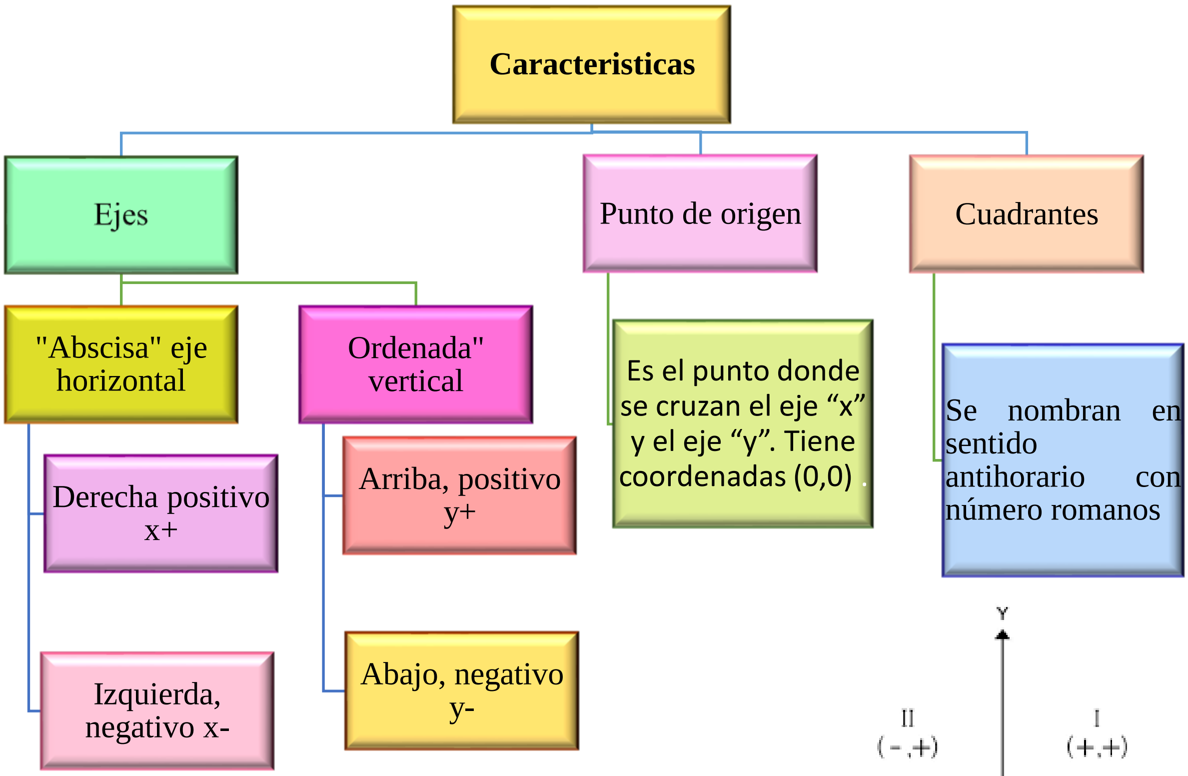
Plano Cartesiano 2
Localizar puntos en el plano cartesiano 3
Producto Cartesiano 4
Concepto de Función 7
Función Lineal 11
Función Cuadrática 13
Función Constante 16
Función Cúbica 16
Ecuación explícita de la recta 17
Ecuaciones Lineales 20
Método de Reducción 26
Método de Sustitución 28
Método de Igualación 31
Ecuación Cuadrática 33
Ecuaciones de Segundo Grado: Completa 34
Ecuaciones de Segundo Grado: Incompletas 37
Ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$ 37
Ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$ 37
Aplicaciones de la Ecuación Cuadrática 39
Función Cuadrática 40
Términos de la función cuadrática 40
Análisis Combinatorio 46
Triángulo rectángulo 55
Ángulos de elevación y de depresión 59
Ejercicios Resueltos 71
Volumen de Cuerpos Geométricos 72
Referencias 76

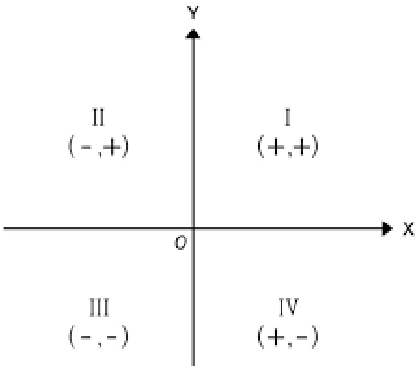
Teléfonos
235-180 504-805
Dirección en Quito - Ecuador
Gatto Sobral Oe7-261 y Andrés de Artieda
Email
17h02853@gmail.com

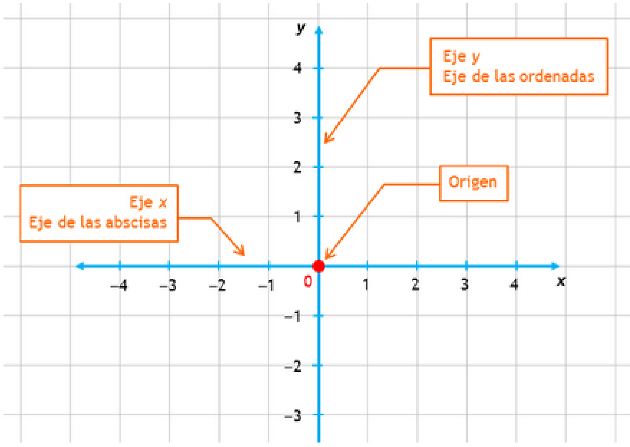
Plano Cartesiano

Se utiliza para representar gráficamente puntos, líneas, curvas y figuras geométricas en dos dimensiones, se compone de dos ejes perpendiculares: el eje horizontal o eje de las abscisas (X) y el eje vertical o eje de las ordenadas (Y).

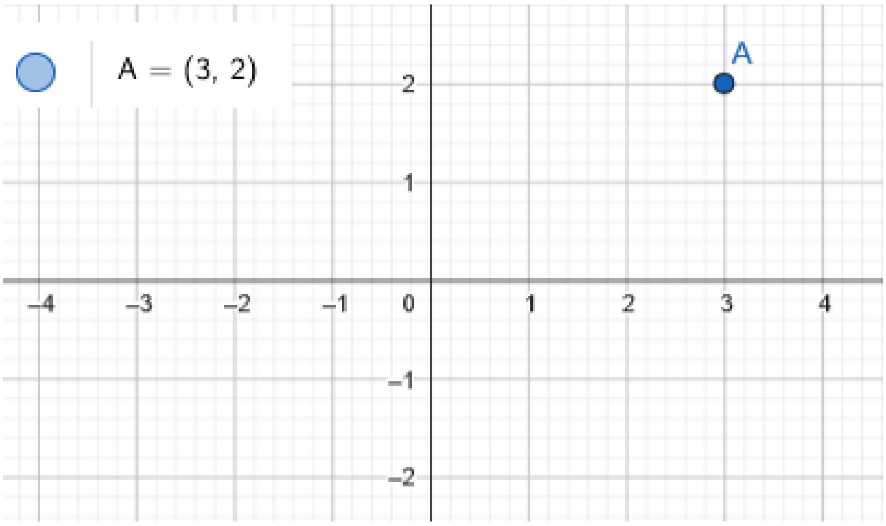
Las características del plano cartesiano son las siguientes:







Coordenadas: Cada punto en el plano cartesiano se representa mediante un par ordenado de números (x, y), donde el primer número representa la posición del punto en el eje X y el segundo número representa la posición del punto en el eje Y.



Descripción: Punto en el plano cartesiano
Fuente: Geogebra

Localizar puntos en el plano cartesiano

En el plano cartesiano, los puntos se representan mediante pares ordenados de números (x, y), donde "x" representa la posición del punto en el eje horizontal (abscisas) y "y" representa la posición del punto en el eje vertical (ordenadas).

Ejemplo 1: Se tiene el punto **A (2,3)**

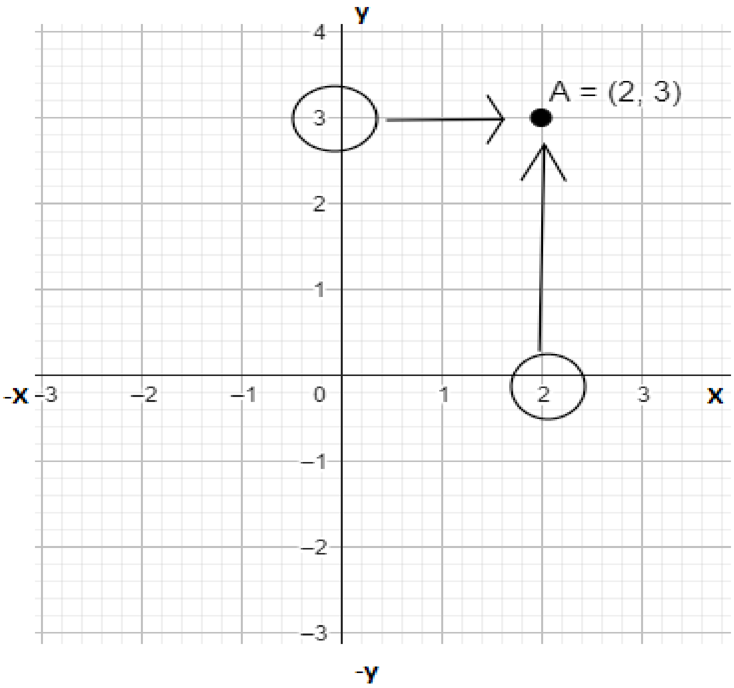
Procedimiento:

a. Identifico los elementos del par ordenado del Punto A (abscisa, ordenada)

Abscisa=2

Ordenada= 3

b. Identificamos el cuadrante de acuerdo a los signos de la abscisa y la ordenada, como son positivo se encuentra en el primer cuadrante



Ejercicios de repaso 1

Ubique los siguientes puntos en el plano cartesiano, una los puntos en orden alfabético y escriba la forma de la figura que obtiene:

A= (-3, 3)

B= (-2, 3)

C= (0, 2)

D= (2, 3)

E= (3, 3)

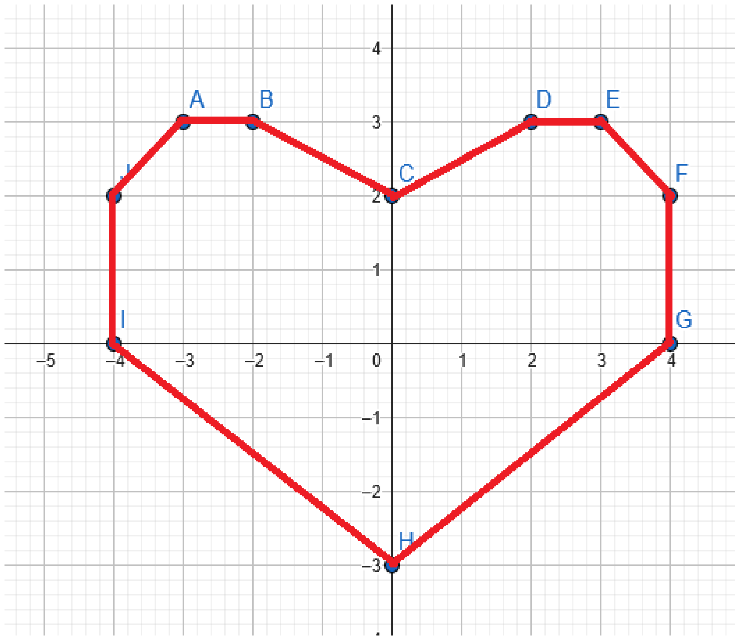
F= (4, 2)

G= (4, 0)

H= (0 , -3)

J= (-4,2)

I= (-4,0)



Producto Cartesiano

El resultado del producto cartesiano entre dos conjuntos A y B, denotado como A x B, es un conjunto que contiene todas las posibles combinaciones de elementos, donde el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertenece a B.

Su definición formal es: A x B= $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \ \mathbf{x} \epsilon \ \mathbf{A}, \mathbf{y} \ \epsilon \ \mathbf{B}\}$

Propiedades del Producto Cartesiano

1. Si el producto cartesiano, AxB, de dos conjuntos, A y B, es vacío, entonces al menos uno de ambos conjuntos es vacío.
2. Si el producto cartesiano, AxB, de dos conjuntos, A y B, es no vacío, entonces ambos conjuntos A y B son no vacíos.

Nota: Si el número de elementos del conjunto A es m y el número de elementos del conjunto B es n, por lo tanto, el número de pares de ordenados del producto cartesiano es mxn.

Ejemplo 1.

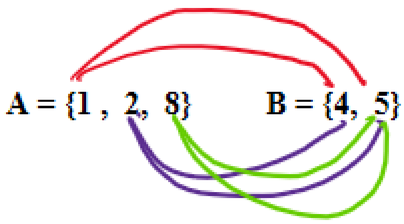
Si **A = {1, 2,8}** y **B = {4, 5},** encontrar **AxB**

Para encontrar el producto cartesiano de AxB se realiza el siguiente proceso.

1. Contar el número de elementos del conjunto A y B

m es el número de elementos del conjunto A entonces m=3, n es el número de elementos del conjunto B entonces n= 2.Se multiplica los elementos de m por n y se obtiene, mxn= (3) (2)= 6, por lo tanto el número de pares ordenados son 6 del producto cartesiano.

2. Cada elemento del conjunto A se relaciona con todos los elementos del conjunto B.



AxB= {(1,4) (1,5) (2.4) (2,5) (8,4) (8,5)}

Como se puede observar se obturaron 6 pares ordenados de la multiplicación mxn.

Relación

Una **relación R** de un conjunto **A** en un conjunto de **B** es un **subconjunto** de un producto cartesiano AxB, que cumplen una característica particular S.

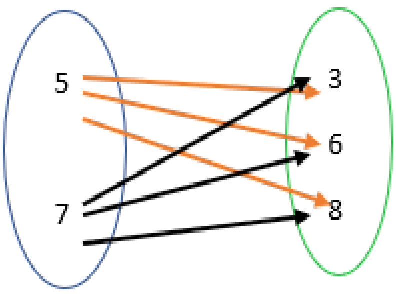
R= {(x,y) ∈ A x B S (x,y) }

Las funciones son subconjuntos de las relaciones; de ahí que toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

Existe relaciones en la que a cada elemento del conjunto A, le puede corresponder más de un elemento del conjunto B por lo tanto no es función.

Ejemplos:

Si M = {5, 7} y N = {3, 6, 8}



Se realiza el producto cartesiano entre el conjunto M x N

M x N = {(5, 3), (5, 6), (5, 8), (7, 3), (7, 6), (7, 8)}

Se verifica el enunciado de la relación en este caso nos solicita el conjunto de pares ordenados cuyo segundo elemento sea menor a 7

a. Encontrar la **relación** matemática del conjunto de pares ordenados cuyo segundo elemento es menor a 7:

M x N = {(5, 3), (5, 6), (5, 8), (7, 3), (7, 6), (7, 8)}

conjunto de pares ordenados cuyo segundo elemento es menor a 7

R = {(5, 3), (5, 6), (7, 3), (7, 6)}

b. Encontrar la **relación** matemática del conjunto de pares ordenados cuyo segundo elemento es par:

Se realiza el producto cartesiano entre el conjunto M x N

M x N = {(5, 3), (5, 6), (5, 8), (7, 3), (7, 6), (7, 8)}

Se verifica el enunciado de la relación en este caso nos solicita el conjunto de pares ordenados cuyo segundo elemento es par:

M x N = {(5, 3), (5, 6), (5, 8), (7, 3), (7, 6), (7, 8)}

conjunto de pares ordenados cuyo segundo elemento es par

R = {(5, 6), (5, 8), (7, 6), (7, 8)}

Ejercicios de repaso 1

Dados los siguientes conjuntos: **A =** {2,4} y **B =** {1,3}. Luego de realizar A x B, indicar la relación que cumpla con la siguiente condición: **x sea mayor que y**

Solución:

Se realiza el producto cartesiano de A x B

A x B = {(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3)}

Se verifica el enunciado de la relación

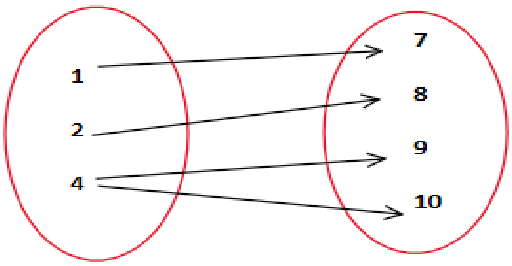
La relación de forma algebraica es: **R**$_1$ = {(x, y) ∈ A x B / $x > y$}

Los pares ordenados que cumplen son:

R$_1$ = {(2, 1), (4, 1), (4, 3)}

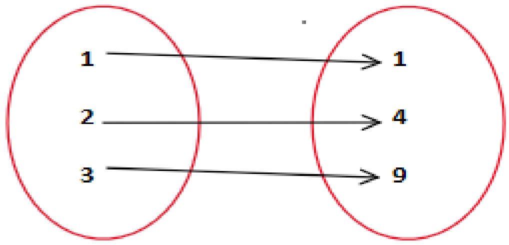
Indicar si las relaciones mostradas en las gráficas corresponden a una función.

Grafica 1



En los pares ordenados de la gráfica 1: {(1,7) (2,8) (4,9) (4,10)}, como los elementos del conjunto **A** tiene dos valores en el conjunto **B**, se dice que no es función.

Gráfica 2

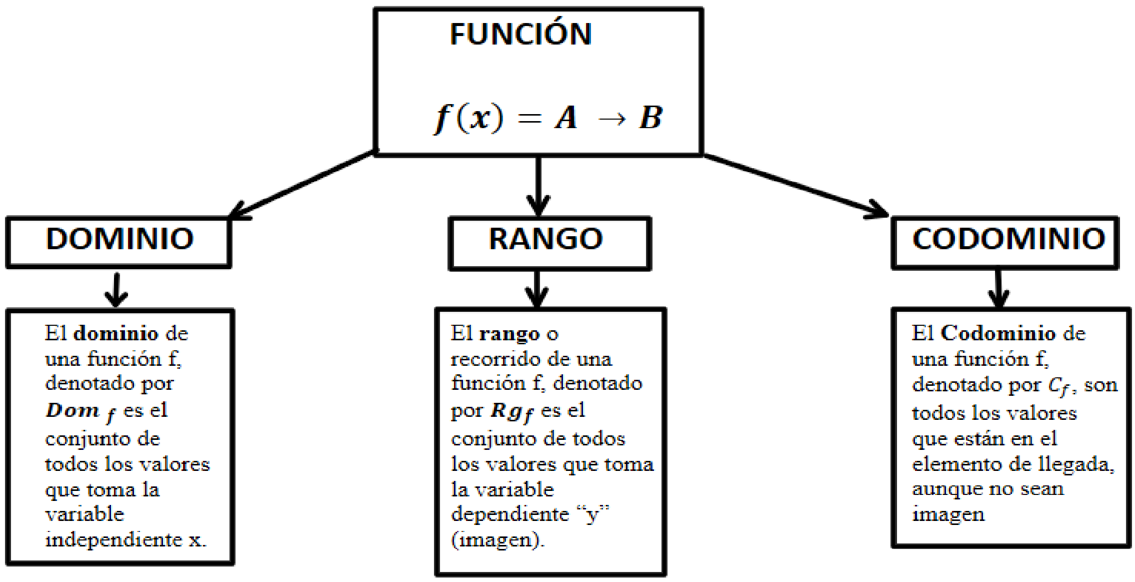


En los pares ordenados de la gráfica 2: {(1,1) (2,4) (3,9)} se puede observar que a cada elemento del conjunto **A** le corresponde un solo elemento del conjunto **B**, por lo tanto, si es función.

Concepto de Función

Una **función** en matemática, es el término usado para **indicar la relación** o correspondencia **entre dos o más conjuntos**. El conjunto de partida también se lo conoce como **Dominio**, y al conjunto de llegada se le conoce como **Imagen, Recorrido o Rango**

Una función f de A en B es una relación que le hace corresponder a cada elemento de $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ uno y solo un elemento $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$, llamado también Imagen de x *por* f, y se escribe $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.



Descripción: Mapa conceptual de Función

Fuente: Área de Matemática

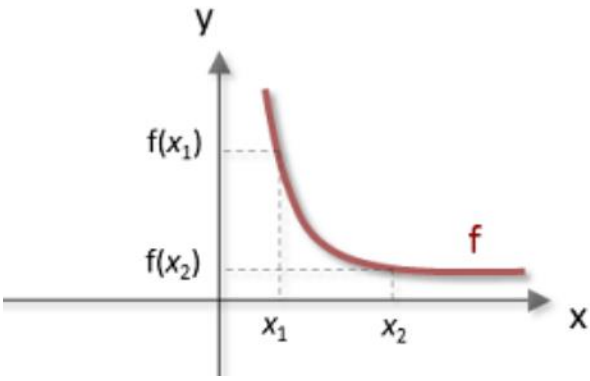
Identificación Gráfica de una función

Para identificar gráficamente que una gráfica pertenece a una función, se debe trazar una línea paralela al eje de la “y” y si esta corta al gráfico en un solo punto entonces la gráfica pertenece a una función, pero si corta a la gráfica en dos o más puntos ya no es una función.

Monotonía de una función

Una **función decreciente** “f” es una función tal que al aumentar la variable independiente “x” disminuye la variable “y”

Donde x1, x2 ϵ x, entonces si se cumple que:



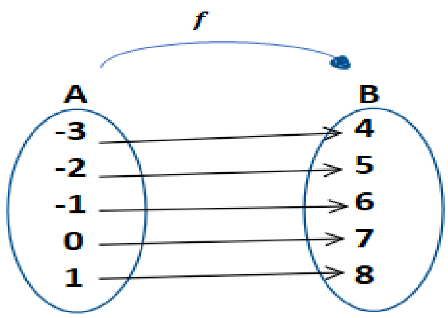
Descripción: Gráfica de una función cuadrática con “a>0”

Fuente: https://n9.cl/bkk52

Ejercicios de repaso 2

Representar en par ordenado cada gráfica. Luego, indica si la representación es una función.

Gráfica 1

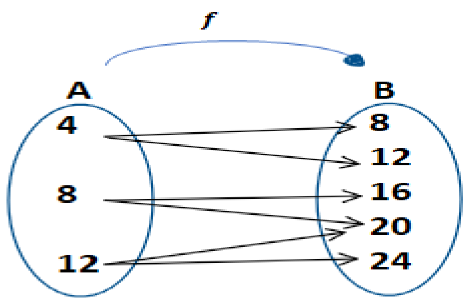


Representación de par ordenado

f= {(-3,4), (-2,5), (-1,6), (0,7), (1,8)}

Se puede observar que a cada elemento del conjunto **A** le corresponde un solo elemento del conjunto **B**, por lo tanto, ***si es función***.

Gráfica 2



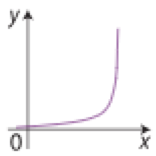
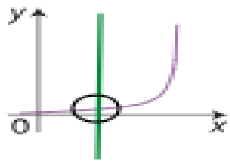
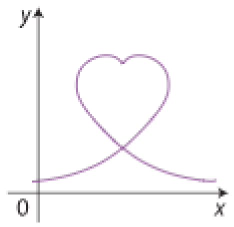
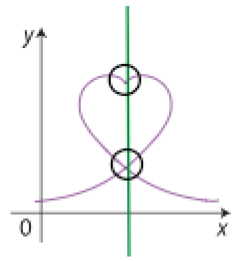
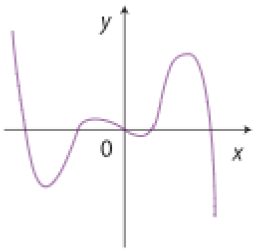
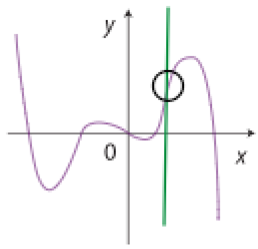
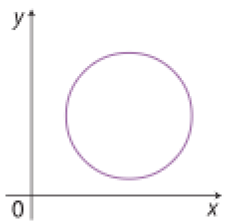
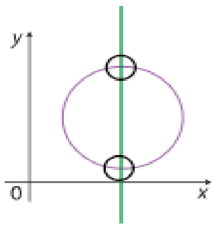
Representación de par ordenado

f= {(4,8), (4,12), (8,16), (8,20), (12,20), (12,24)}

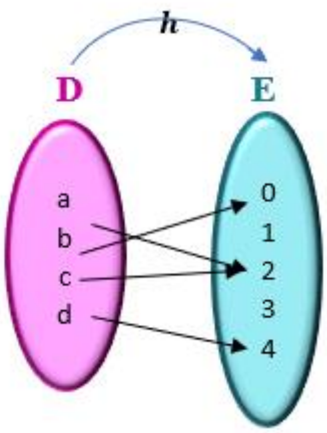
Como los elementos del conjunto **A** tiene dos valores en el conjunto **B**, se dice que ***no es función***.

Cuáles de la siguientes graficas corresponde a una función

Grafica 1		Se traza la línea paralela al eje de la “y” y como esta

		corto en la gráfica en un solo punto entonces la gráfica pertenece a una función. **Si es función**
Grafica 2 		Se traza la línea paralela al eje de la "y" y como esta corto en la gráfica en dos o más puntos entonces la gráfica no pertenece a una función. **No es función**
Grafica 3 		Se traza la línea paralela al eje de la "y" y como esta corto en la gráfica en un solo punto entonces la gráfica pertenece a una función. **Si es función**
Grafica 4 		Se traza la línea paralela al eje de la "y" y como esta corto en la gráfica en dos o más puntos entonces la gráfica no pertenece a una función. **No es función**

Dado el siguiente diagrama de una función, ¿cuál es su dominio, rango y codominio?



El dominio de una función f(x) es el conjunto de todos los valores para los cuales la función está definida, y el rango de la función es el conjunto de todos los valores que f toma. En el caso del diagrama se tiene:

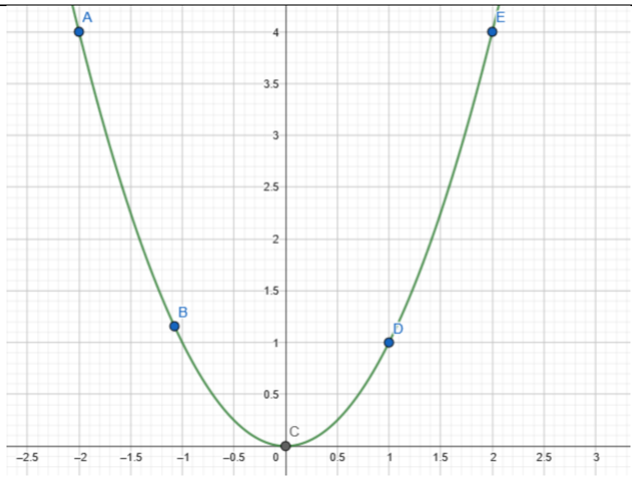
Dominio = {a, b, c, d}

Rango = {0, 2, 4}

Codominio = {0, 1, 2, 3, 4}

Dada la siguiente función de manera gráfica, identificar: su dominio, rango, codominio

Grafica 1	**Dominio. -** Para hallar el dominio se debe observar todos los posibles



valores que puede tomar la variable independiente “x”, como puede tomar cualquier valor nos quedaría.

$\boldsymbol{Dom_f}$: $\mathbb{R}$

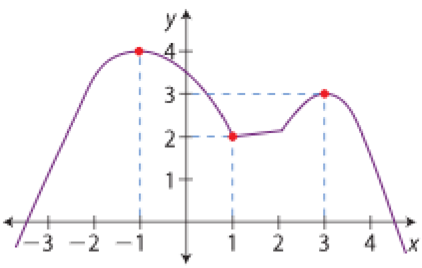
Rango. - Son todos los valores que se va a obtener al sustituir los valores de la variable independiente, por ello estos los obtenemos mediante la gráfica.

$\boldsymbol{Rg_f}$: [0, +∞)

Codominio: Son todos los valores que están en el eje “y” aunque no sean el resultado de reemplazar la variable independiente

$\boldsymbol{C_f}$: $\mathbb{R}$

Determinar la monotonía por intervalos



Para identificar la monotonía de una función en un gráfico si el valor en x crece y la figura de dirige hacia arriba es creciente o si el valor de x crece y la figura se dirige hacia abajo el intervalo de la función es decreciente,

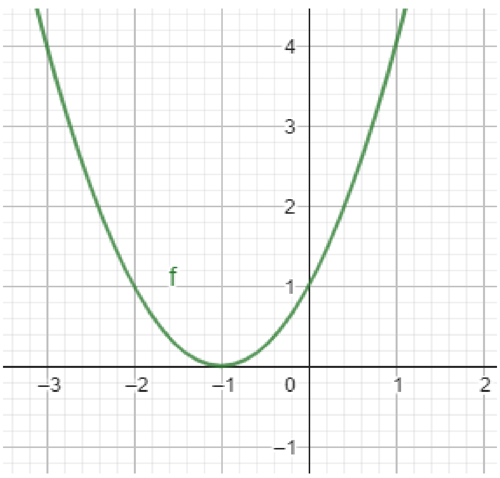
Identificamos los intervalos.

[-3,-1] es Creciente

[-1, 1] es Decreciente

[1,3] es Creciente

[3, 4] es Decreciente



Identificamos los intervalos

$]-\infty,-1]$ es Decreciente

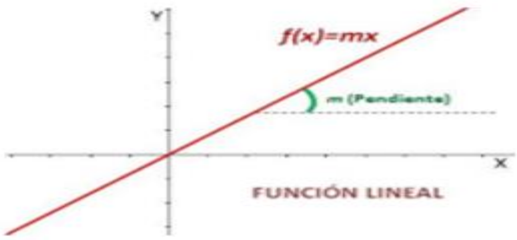
$[1,+\infty[$ es Creciente

Función Lineal

Es una función polinómica de primer grado que se la representa como una recta en el plano cartesiano. Es de la forma: $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$ **donde:** ***m*** y ***b*** son constantes reales y ***x*** es un variable real.

m es la pendiente (inclinación) de la recta y ***b*** es la ordenada al origen.

En el caso de las funciones lineales, **b = 0**. La recta pasa por el origen



Toda función lineal tiene a los **reales como se dominio y su rango** salvo que exista un intervalo dado denotando su dominio y recorrido.

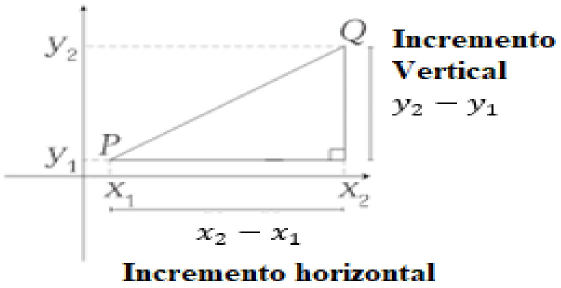
Pendiente

La **pendiente** es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas. Se denota con la letra m.

La pendiente de una recta que pasa por los puntos P (x1; y1) y Q (x2; y2) se halla mediante la expresión

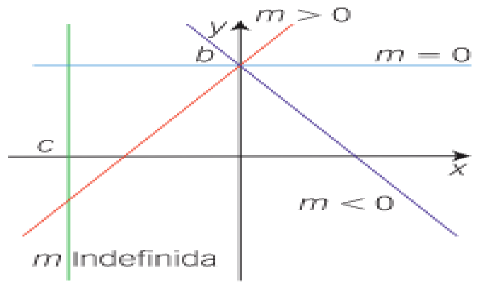
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

Si **m = 0,** la función **es constante**



Si la pendiente es positiva, **m > 0**, la función es creciente. y ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es agudo

Si la pendiente es negativa, **m < 0**, la función es decreciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es obtuso



Si la *m* es positiva, según aumente la *x* la *y* también irá aumentando (función creciente). En cambio, si *m* es negativa, cuando aumenta la *x* la *y* disminuirá (función decreciente).

Ejercicios de repaso 1

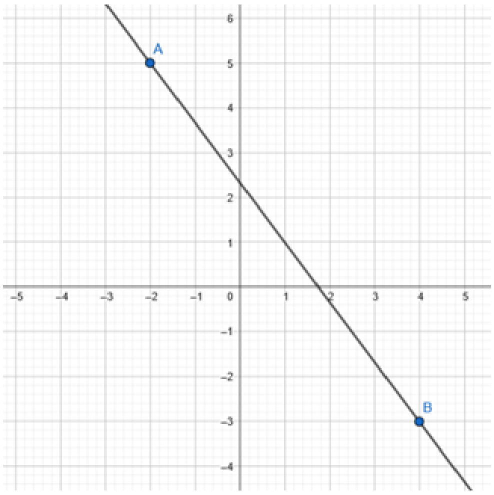
Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (-2, 5) y B (4, -3)

Solución: Aplicamos la fórmula de pendiente. entonces $x_1 = -2\,;\ y_1 = 5\ entonces\ x_2 = 4\,;\ y_2 = -3$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-3-5}{4-(-2)} \qquad m = \frac{-8}{4+2}$$

$$m = \frac{-8}{6} \qquad m = -\frac{4}{3}$$

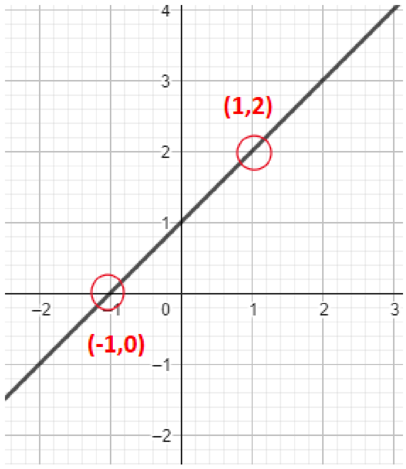


Dada la siguiente función graficar $f(x) = x + 1$

1. Patra graficar una funcion afin solo se necesita dos puntos mediante una tabla ver el ejemplo.

x	y = x + 1	(x, y)
-1	y = -1 + 1 = 0	(-1, 0)
1	y = 1 + 1 = 2	(1, 2)

2. Se grafica en el plano cartesiano los puntos encontarados mediante la tabla se une los puntos.



Dada la siguiente función

$$y = -2x + 3$$

Determine a) ¿cuál es la inclinación de la recta? b) ¿dónde se corta con el eje de las “y”? c) ¿monotonía y por qué?

Solución: **m** y **b** son constantes reales. En donde m es la pendiente (inclinación) de la recta y b es la ordenada al origen; es decir donde se corta la recta con el eje y.

$$y = \mathbf{-2}x + \mathbf{3}$$

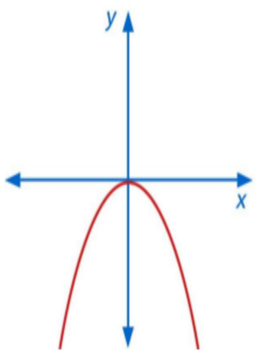
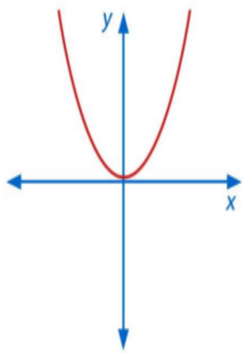
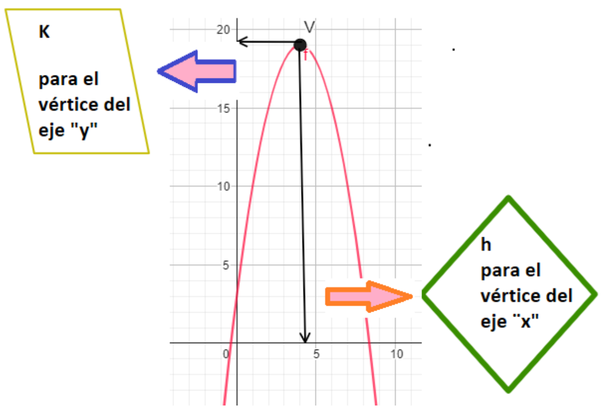
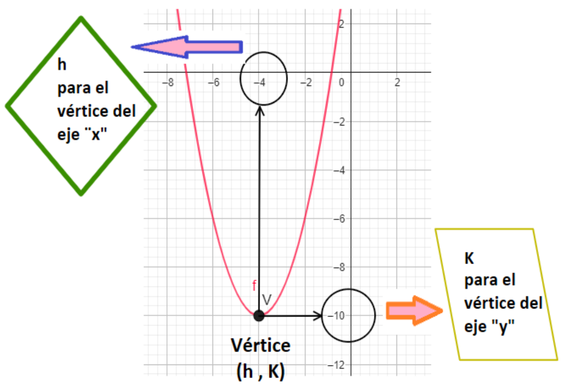
$$f(x) = \boldsymbol{m}\,x + \boldsymbol{b}$$

a) ¿cuál es la inclinación de la recta?	**m = -2**
b) ¿dónde se corta con el eje de las “y”?	**b = 3**
c) ¿monotonía y por qué?	decreciente, porque la pendiente es negativa m=-2

Función Cuadrática

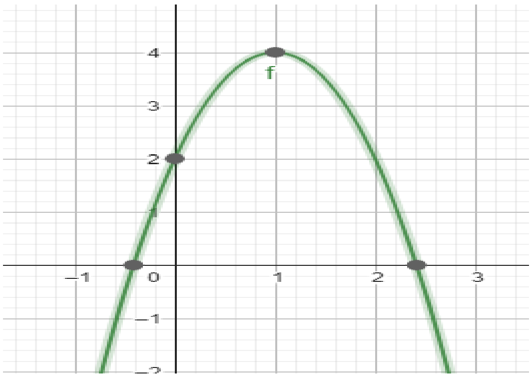
Una función cuadrática es una función de variable real cuya expresión algebraica es $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$

El dominio de una función cuadrática es el conjunto de los números R y el recorrido se determina a partir de su ecuación o su representación gráfica.

<table>
<tr><th colspan="2">MÁXIMO</th><th colspan="2">MÍNIMO</th></tr>
<tr><td>a<0 (el valor de a es negativo), por lo tanto, se abre hacia abajo.</td><td></td><td>a>0 (el valor de a es positivo), por lo tanto, se abre hacia arriba.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

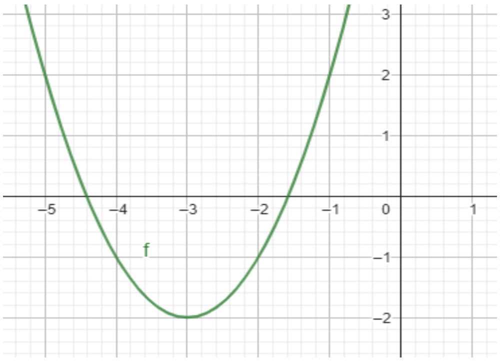
<table>
<tr>
<td>
Para el cálculo del Dominio se tiene:

$$\boldsymbol{Dom\ f(x)} = \mathbb{R}$$

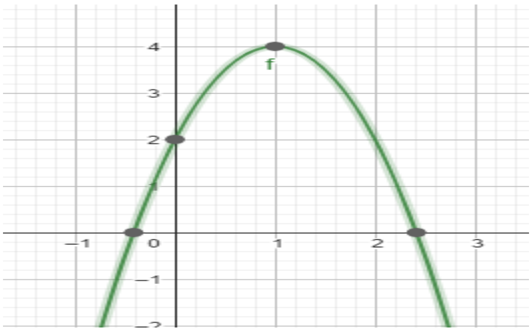


</td>
<td>
Para el cálculo del Dominio se tiene:

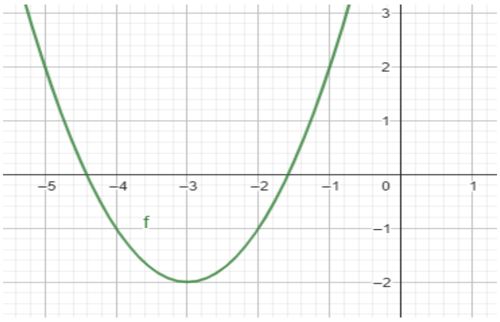
$$\boldsymbol{Dom\ f(x)} = \mathbb{R}$$



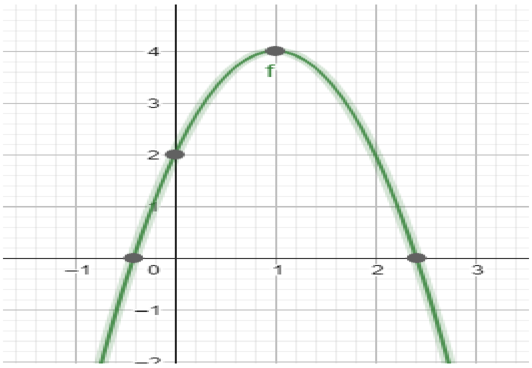
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Para el cálculo del Rango o del Recorrido
Si a<0 **Ran** $\mathbf{f(x)} =]-\infty, \boldsymbol{k}]$
Ejemplo:



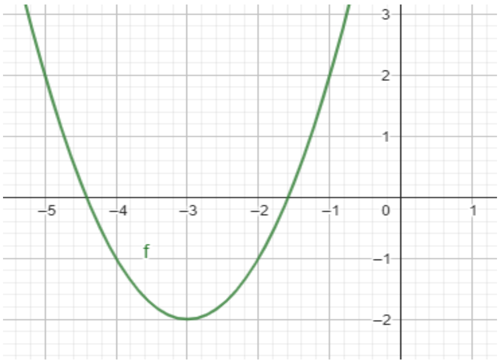
Ran $\mathbf{f(x)} =]-\infty, \mathbf{4}]$
</td>
<td>
Para el cálculo del Rango o del Recorrido
Si a>0 **Ran** $\mathbf{f(x)} = [\boldsymbol{k}, +\infty[$
Ejemplo



Ran $\mathbf{f(x)} = [-\mathbf{2}, +\infty[$
</td>
</tr>
<tr>
<td>
La monotonía a<0 (el valor de “a” es negativo)
Creciente = $]-\infty, \boldsymbol{h}]$
Decreciente $= [\boldsymbol{h}, +\infty[$
Ejemplo:



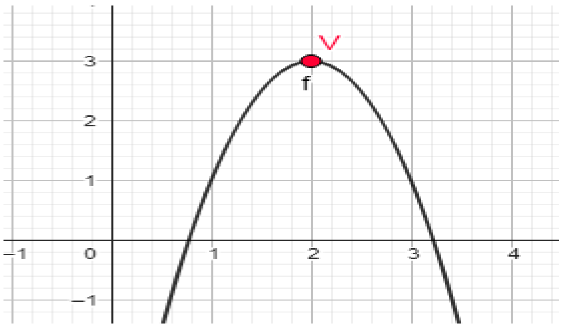
Creciente = $]-\infty, \mathbf{1}]$
Decreciente $= [\mathbf{1}, +\infty[$
</td>
<td>
La monotonía **a>0** (el valor de “a” es positivo)
Decreciente = $]-\infty, \boldsymbol{h}]$
Creciente $= [\boldsymbol{h}, +\infty[$
Ejemplo:

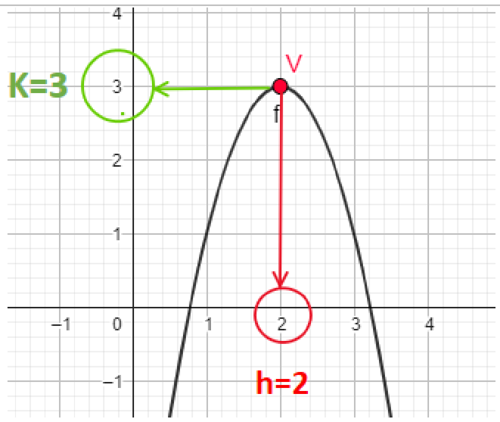
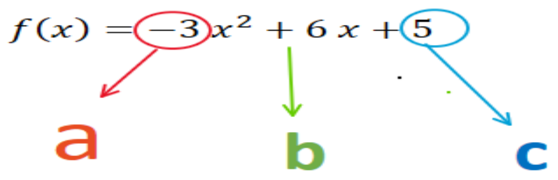


Decreciente = $]-\infty, -\mathbf{3}]$
Creciente $= [-\mathbf{3}, +\infty[$
</td>
</tr>
</table>

Ejemplo 1

Dada la función cuadrática: $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$



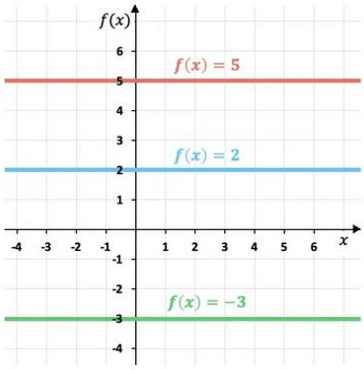
Determinar el Dominio	$Dom\ f(x) = \mathbb{R}$
Determinar el Rango o Recorrido	**Ran** f(x) $=]-\infty, \mathbf{3}]$
Indique el valor del vértice observando la gráfica.	 **La respuesta: V= (h, K), h=2 y K=3** **V= (2,3)**
Determinar si es Máximo o Mínimo	Para determinar el Máximo y el Mínimo encontramos los coeficientes a, b y c.  a=-3 b=6 c=5 Si el valor de **"a"** es negativo la parábola tiene un **MÁXIMO**
La parábola se abre hacia	**ABAJO**
La monotonía	**Creciente =** $]-\infty, \mathbf{2}]$ **Decreciente =** $[\mathbf{2}, +\infty[$

Función Constante

Una función constante tiene la forma $f(x) = b$, donde b es una constante.

Una función es constante cuando su representación gráfica es una recta o un segmento de recta horizontal.

Por lo tanto, como la gráfica de la función no sube ni baja en el intervalo, entonces la función es constante en él.

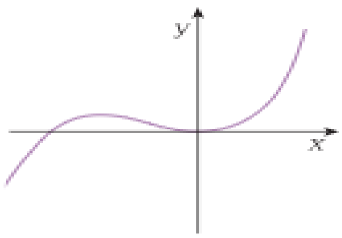
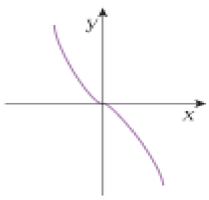
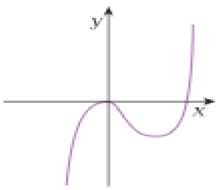


Descripción: Gráfico de una Función constante

Fuente: https://n9.cl/j04ut

Función Cúbica

Una función cúbica es una función de variable real cuya expresión algebraica es $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde a, b, c y d son números reales y $a \neq 0$.

Dominio de la función cubica:	Son los números Reales $\boldsymbol{Dom\ f(x)} = \mathbb{R}$
Rango o recorrido de la función cubica:	Son los números Reales $\boldsymbol{Ran\ f(x)} = \mathbb{R}$
A partir de la gráfica también es posible determinar si la función es creciente, decreciente o los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.	
Ejemplos: La figura 1 y figura 3 se muestra la gráfica de una función cubica con dos puntos de corte con el eje x y no es creciente y decreciente en todo su dominio. La figura 2 es una función cúbica con un punto de corte en el eje x y totalmente decreciente en su dominio.	**Figura 1** 
Figura 2 	**Figura 3** 

Ecuación explícita de la recta

La ecuación explícita de la recta es $\boldsymbol{y = mx + b}$ donde m es la pendiente y b corresponde al corte con el eje "y".

Caso 1: Cuando se conocen la pendiente y la intersección en la ordenada (eje "y")

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Caso 2: Cuando se conoce la pendiente un punto

Datos: A= (x1, y1) y el valor de la pendiente m

Primero: Reemplazar el valor de la pendiente y las coordenadas x1 y y1 para determinar el valor b.

Segundo: Se reemplazan el valor obtenido de m y b en la ecuación

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Ejemplos

Encontrar la ecuación explicita de la recta que tiene pendiente 7 y su ordenada es 5.

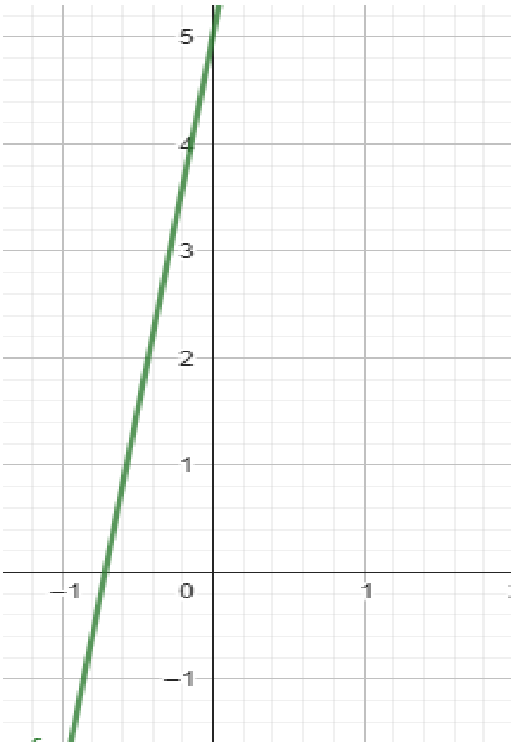
Caso 1

Datos: m=7 y b=5

y=mx+b

y=7x+5

Por lo tanto, la ecuación explicita de la recta es $y = 7x + 5$



Encontrar la ecuación explicita de la recta que pasa por (-2,4) y tiene pendiente -1.

Caso 2

y=mx+b

4= (-1) (-2) +b

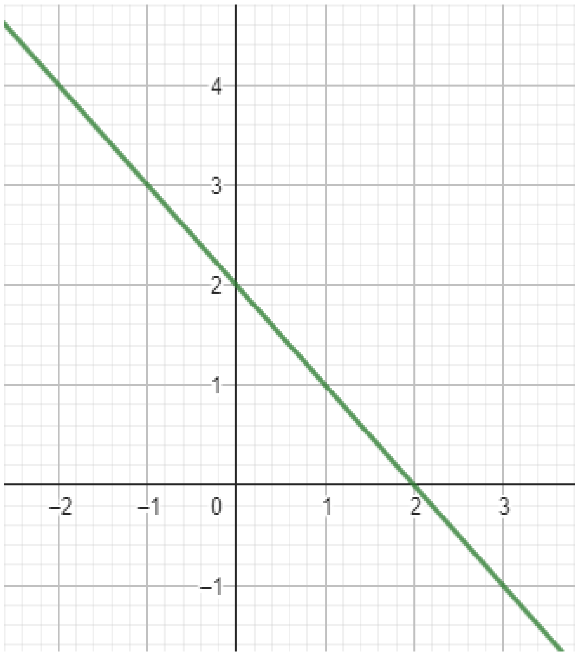
b=2

y=mx+b

y= (-1) x+2

y=-x+2

Por lo tanto, la ecuación explicita de la recta es $y = -x + 2$



Ecuación de la recta conociendo la pendiente y un punto

Cuando se conocen la pendiente (m) y un punto (x1, y1), puede utilizarse la expresión algebraica de la pendiente para determinar la ecuación de una recta.

A la expresión **$(y - y_1) = m (x - x_1)$** se le conoce como **ecuación punto-pendiente**.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (-5, 1) y su pendiente es -2.

Solución: Para encontrar la ecuación punto-pendiente se utiliza la expresión algebraica dada y se reemplazan sus valores:

Datos

(x1, y1) = (-5, 1)

m = -2

$(y - y_1) = m (x - x_1)$

Proceso

Se reemplaza valores.
y - 1 = -2 (x - (-5))

Se destruye paréntesis y se aplica ley de signos.

y - 1 = -2 (x + 5)

Se aplica propiedad distributiva.
y - 1 = -2x – 10

Se despeja variable y.

y = -2x - 10 + 1

Se obtiene la ecuación de la recta.
y = -2x – 9

Ecuación de la recta conociendo dos puntos

Para determinar la ecuación de la recta dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), se debe:

1. Calcular la pendiente por medio de la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2. Usar la pendiente "**m**" y uno de los puntos (x_1, y_1) o (x_2, y_2), para reemplazar en la ecuación punto-pendiente: **(y - y_1) = m (x - x_1)**

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: A (1, -1) y B (0, 3).

Donde:

A (**1** , **-1**) $\rightarrow$ P_1 (x_1 , y_1)

B (**1** , **-1**) $\rightarrow$ P_2 (x_1 , y_1)

Solución

1.- Calcular la pendiente utilizando los dos puntos dados

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3 - (-1)}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3 + 1}{0 - 1}$$

$$m = \frac{4}{-1}$$

$$m = -4$$

2.- Utilizar la ecuación punto pendiente, reemplazar la pendiente hallada y uno d ellos puntos en la ecuación

(y - y_1) = m (x - x_1)

y - (- 1) = -4 (x - 1)

y + 1 = -4x + 4

y = -4x + 4 - 1

y = -4x + 3

Ecuación general de la Recta

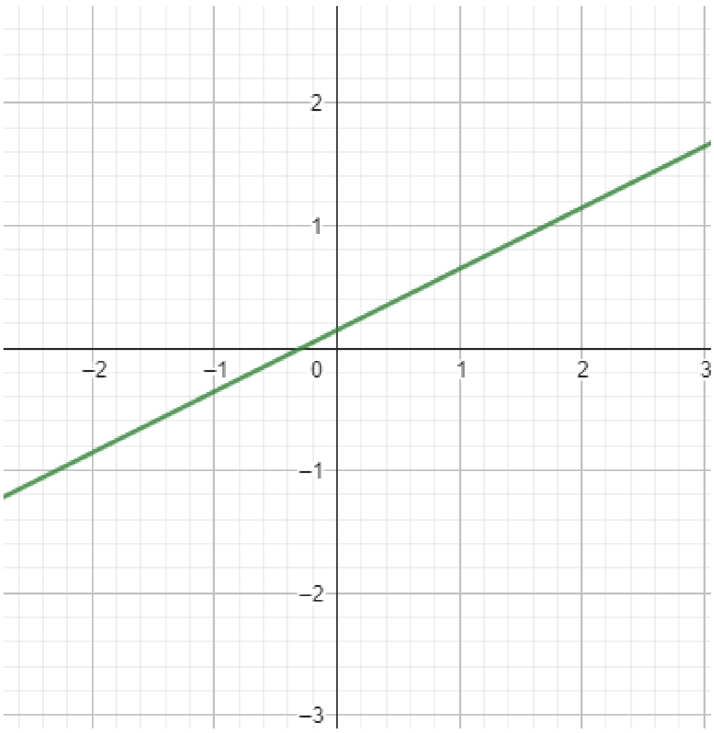
La ecuación general de una recta es una expresión de la forma $Ax + By + C = 0$ donde A, B y C son números reales y donde A y B no son cero al mismo tiempo.

$$Ax + By + C = 0$$

Para determinar la pendiente tenemos la siguiente formula: $$m = -\frac{A}{B}$$	Para determinar el valor de ordenada "b" que es punto de corte en el eje x tenemos la siguiente formula: $b = -\frac{C}{B} \quad donde\ b \neq 0$

Ejemplos

Encontrar la pendiente y el corte en la ordenada (eje "y") de la recta cuya ecuación general es $-7x + 14y - 2 = 0$

<table>
<tr><td colspan="2">$-7x + 14y - 2 = 0$
A=-7 B=14 C=-2</td></tr>
<tr><td>Para determinar la pendiente tenemos la siguiente formula:
$$m = -\frac{A}{B}$$ $$m = -\frac{-7}{14}$$ $$m = \frac{1}{2}$$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Para determinar el valor de ordenada "b" que es punto de corte en el eje x tenemos la siguiente formula:
$b = -\frac{C}{B} \quad donde\ b \neq 0$ $$b = -\frac{-2}{14}$$ $$b = \frac{1}{7}$$</td></tr>
</table>

Ecuaciones Lineales

Una **ecuación de primer grado** es una **igualdad** matemática **con una o más incógnitas**. Dichas incógnitas deben ser despejadas o resueltas para encontrar el valor numérico de la igualdad.

Las ecuaciones de primer grado reciben este nombre porque sus variables (incógnitas) están elevadas a la **primera potencia** (x^1), que suele representarse solo con una “x”.

Del mismo modo, **el grado de la ecuación indica el número de soluciones posibles**. Por lo tanto, **una ecuación de primer grado** (también llamada ecuación lineal) **solo tiene una solución**.

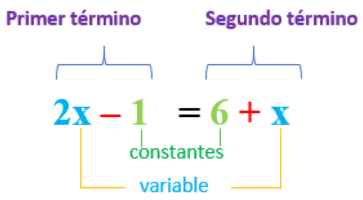
Ejemplo:

Ecuación de primer grado con una incógnita: $3x + 9 = 4$

Elementos de una ecuación de primer grado

Una ecuación posee varios elementos:

- Variable:
- Constantes
- Símbolo



Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales que se consideran simultáneamente. En un sistema de ecuaciones lineales, el objetivo es encontrar los valores de las variables que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas pueden expresarse de la forma:

$\pm Ax \pm By \pm C = 0$,

donde **A** y **B** son números reales, con $\mathbf{A \neq 0}$ y $\mathbf{B \neq 0}$

En este tipo de sistema se debe considerar que existe una variable independiente y otra dependiente

Un sistema de ecuaciones lineales se puede representar de la siguiente manera:

Por ejemplo:

$$\pm\ \mathbf{Ax} \pm \mathbf{By} \pm \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{4x + \quad 2y \quad - 5 = 0}$$

Donde:

Variables: “x” y “y”

A: 4

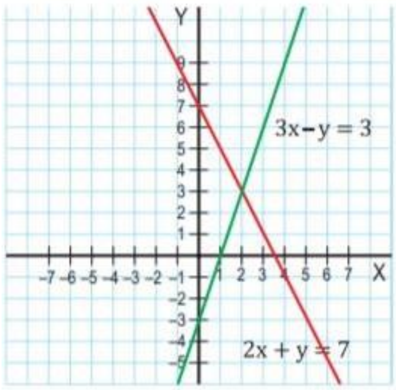
B: 2

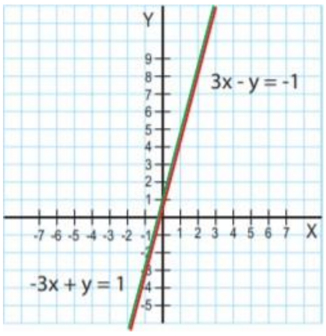
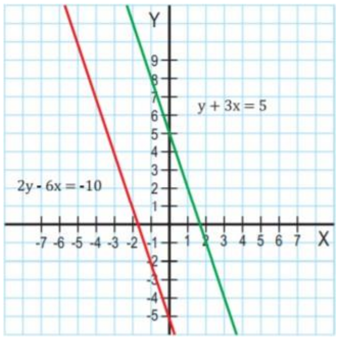
C: -5 (se respeta el signo del número negativo)

Tipos de sistemas de ecuaciones lineales según sus soluciones

Las soluciones o raíces de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas están determinadas por los puntos que tengan en común las rectas que se obtienen al representar gráficamente las soluciones de cada ecuación.

Gráficamente las soluciones se representan de la siguiente manera:

Tipo de sistema	Ejemplo	
Compatibles determinados	$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$ 	Las **dos rectas son secantes**: tienen un único punto en común. El sistema tiene **solución única**, el par de valores formado por x = 2 e y = 3.

Compatibles indeterminados	$\left.\begin{array}{l} 3x-y=-1 \\ -3x+y=1 \end{array}\right\}$ 	Las **dos rectas son coincidentes**: tienen todos los puntos comunes. Todas las soluciones de una ecuación lo son también de la otra.
Incompatibles	$\left.\begin{array}{r} 2x-6y=-10 \\ y+3x=5 \end{array}\right\}$ 	Las **dos rectas son paralelas**: no tienen ningún punto en común. No existe, ninguna solución común a las dos ecuaciones.

Sistema Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones de primer grado, en el cual se relacionan dos incógnitas.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \mathbf{6x+3y=4} \; \boldsymbol{Ec\ 1} \\ \mathbf{2x-y=5} \; \boldsymbol{Ec\ 2} \end{cases}$$

En los sistemas de ecuaciones, se debe buscar los valores de las incógnitas, con las cuales, al reemplazar, deben dar la solución planteada en ambas ecuaciones.

A cada una de las ecuaciones se les denomina también **restricciones** o **condiciones**.

Tipos de sistemas

Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según el número de soluciones que pueden presentar. Pueden ser:

- **Sistema compatible** si tiene solución, en este caso además puede distinguirse entre:
  - Sistema **compatible determinado** cuando tiene una **única solución**.
  - Sistema **compatible indeterminado** cuando admite **un conjunto infinito de soluciones**.
- **Sistema incompatible** no tiene solución.

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales

Existen algunos métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales, entre los que se encuentran:

- Método Gráfico
- Método de Igualación
- Método de Sustitución
- Método de Reducción

Resolución de ecuaciones lineales 2x2 por el Método Gráfico

La solución del sistema se encuentra analizando cada ecuación como una recta, por tanto, el sistema se entendería como dos rectas que se intersecan en un solo punto. Las coordenadas de dicho punto son los valores que satisfacen simultáneamente las dos ecuaciones.

Al tener el sistema de ecuaciones lineales se debe tomar en cuenta que existe una variable independiente en este caso "x" y otra dependiente "y"

Ejemplo 1:

Hallar gráficamente la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Se identifica las ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \;\; \boldsymbol{Ec\ 1} \\ x + y = 2 \;\; \boldsymbol{Ec\ 2} \end{cases}$$

Solución:

Se despeja la variable y, de cada una de las ecuaciones, se crea una tabla de valores de cada ecuación asignando valores arbitrarios a "x", y se calcula los correspondientes a y.

<u>Ecuación 1</u>

3x – y = 5 Ec 1

1.- Despejamos "y"

- y = 2 - 3x

2.- Como "y" es negativa multiplicamos por (-1) a ambos términos de la ecuación

(-1) – y = (2 - 3x) (-1)

3.- Se despeja la variable “y” y se obtiene la **Ec 3** y= -2+3x **Ec 3**

4.- Realizamos una tabla de valores se puede dar 2

x	y = – 2+3x
-3	– 2+3(-3) = -8
2	– 2+3(2) = 4

x	y
-3	-8
2	4

Ecuación 2.

x + y = 2 Ec 2

1.- Despejamos “y”

y= 2 – x **Ec 4**

2.- Realizamos una tabla de valores se puede dar 2 o más valores a la variable independiente “x” en la **Ec 4**

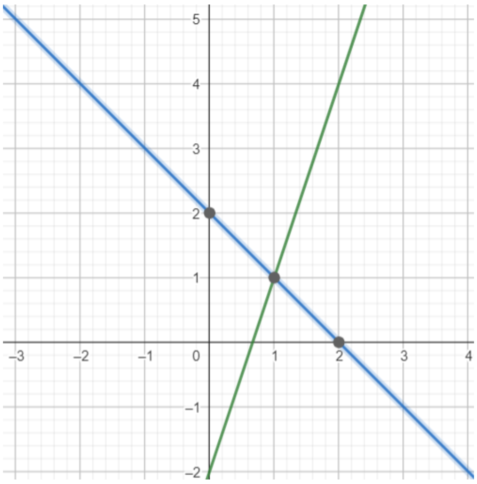
x	y = 2 - x
-3	2 - (-3) = 5
3	2 - (3) = -1

x	y
-3	5
2	-1

Cuando ya hemos hallado la tabla de cada una de las ecuaciones debemos seguir los siguientes pasos

1) Se representa gráficamente los puntos de cada una de las ecuaciones en un sistema de coordenadas cartesianas.

2) Las dos rectas se cortan en el punto (2, 1), por lo que x = 2, y = 1 es la solución del sistema.



Descripción: Método gráfico sistemas de ecuaciones

Fuente: Geoogebra

Nota: El método gráfico no es un método exacto, se utiliza para comprobar una respuesta o para tener un aproximado de la solución.

Método de Reducción

Introducción

El método de reducción en la resolución de sistemas de ecuaciones de dos incógnitas es una herramienta valiosa que ha sido una parte fundamental de la historia de las matemáticas. Fue René Descartes, el famoso filósofo y matemático francés del siglo XVII, quien hizo una contribución significativa al desarrollo de este método.

Método de Reducción

Un sistema de ecuaciones de 2x2 es como tener dos instrucciones matemáticas que involucran dos números desconocidos, digamos x e y. Queremos encontrar cuáles son esos números que hacen que ambas instrucciones sean verdaderas al mismo tiempo.

Ahora, el método de reducción es un poco como mezclar y combinar las dos instrucciones para hacer que una de las letras desaparezca, como si fueran piezas de un rompecabezas que encajan perfectamente.

Procedimiento

1. Se multiplican las ecuaciones por los números apropiados para que, en una de las incógnitas, los coeficientes sean iguales, pero con signo contrario.

2. Se suman ambas ecuaciones del nuevo sistema.

3. Se resuelve la ecuación lineal de una incógnita que resulta.

4. Para este paso hay dos opciones:

• Se repite el proceso con la otra incógnita o,

• Se sustituye la incógnita ya hallada en una de las ecuaciones del sistema y se despeja la otra.

2.1. Ejercicios por el método de reducción

Ejercicio 1

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 \\ 2x + \ \ y &= 14 \end{aligned}$$

Paso 1.- Identificar las ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 & Ec\ 1 \\ 2x + \ \ y = 14 & Ec\ 2 \end{cases}$$

Paso 2- Se iguala una de las incógnitas del sistema.

En este caso, se empieza igualando la incógnita ***y***.

Para ello se multiplica la segunda **Ec 2**, quedando

$$2(2x + \ \ y) = 2 \cdot 14$$

$$4x \ \ + 2y = 28$$

Paso 3- Ahora, se suma o resta (según se requiera) los términos semejantes, para reducir (eliminar) el término con el coeficiente común.

$$\begin{array}{r} 3x - \cancel{2y} = 7 \\ 4x + \cancel{2y} = 28 \\ \hline 7x - 0y = 35 \end{array}$$

Luego, se resuelve la ecuación:

$$7x = 35$$

$$x = \frac{35}{7}$$

$$\boldsymbol{x = 5}$$

Ya se tiene el valor de una de las incógnitas. Para identificar el otro valor, se debe remplazar en una de las ecuaciones el valor que se obtuvo de **x**, en este caso:

de las

$$\boldsymbol{3x - 2y = 7} \quad \boldsymbol{Ec\ 1}$$

$$3(5) - 2y = 7$$

$$15 - 2y = 7$$

$$-2y = 7 - 15$$

$$-2y = -8$$

$$2y = 8$$

$$y = \frac{8}{2}$$

$$\boldsymbol{y = 4}$$

***x*= 5** y **y= 4**

$$\boldsymbol{3x - 2y = 7} \quad \boldsymbol{Ec}$$
$$\boldsymbol{2x + \ y = 14}$$

Elegimos a la **Ec 1** y reemplazamos los valores dado:

$$\boldsymbol{3x - 2y = 7} \quad \boldsymbol{Ec}$$
$$3(5) - 2(4) = 7$$

$$15 - 8 = 7$$
$$\boldsymbol{7 = 7} \quad \textit{Se cumple la igualdad}$$

2.2 Problemas

La suma de dos números es 28 y la diferencia entre estos números es igual a 12, ¿cuáles son los números que cumplen estas condiciones? ¿cómo se resuelve este ejercicio?

DATOS	INCOGNITAS
Primer número	x
Segundo número	y

La suma de do números es igual a veintiocho

$$\boldsymbol{x + y = 28}$$

La diferencia de los números es igual a doce

$$\boldsymbol{x - y = 12}$$

Sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= 28 \\ x - y &= 12 \end{aligned}$$

Y si se hace la suma vertical se tiene que:

$$\begin{array}{rl} & x + \cancel{y} = 28 \\ + & x - \cancel{y} = 12 \\ \hline & 2x \quad = 40 \end{array}$$

$$x = \frac{40}{2}$$

$$x = 20$$

$$\begin{aligned} x + y &= 28 \\ 20 + y &= 28 \\ y &= 28 - 20 \end{aligned}$$

$$y = 8$$

Comprobación

$$x + y = 28$$

$$20 + 8 = 28$$

$$28 = 28$$

Método de Sustitución

Consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituirla en otra ecuación.

Procedimiento

1. Se despeja una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones.

2. Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación y se resuelve la ecuación que resulta de esta sustitución.

3. Una vez calculada la primera incógnita, se calcula la otra utilizando la ecuación despejada del primer paso.

Ejercicios por el método de sustitución

Ejercicio 1

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 5y = 8 \end{cases}$$

Pasos:

1.- Identificamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 & Ec\ 1 \\ 4x + 5y = 8 & Ec\ 2 \end{cases}$$

2.- Se elige una ecuación y la variable con la que deseemos trabajar. En este caso se trabajará con la *Ec 1* y se despejará la variable *"y"*

$$Ec\ 1 \quad 2x + 3y$$

3.- Movemos al término $2x$ al miembro derecho de la ecuación realizando la operación opuesta en este caso (suma –

$$3y = 4 - 2x$$

4.- Como el objetivo es despejar a la variable **"y"** aún se debe mover el número **3** con la operación opuesta (multiplicación- división) y obtenemos la **Ec 4**

$$Ec\ 4 \qquad y = \frac{4 - 2x}{3}$$

5.- Sustituimos el valor de la variable **"y"** en la **Ec 2**. Donde dice **"y"** colocaremos a lo que es igual **"y"**

$$4x + 5y = 8$$

Resultado del despeje

$$y = \frac{4 - 2x}{3}$$

Se sustituye en la **Ec 4** en **Ec 2**

6.- Realizamos una transposición de términos $4x$ al miembro derecho

$$\mathbf{5\left(\frac{4-2x}{3}\right)=8-4x}$$

7.- Trasladamos al número 5 al miembro derecho de la ecuación realizando la operación contraria (multiplicación-división)

$$\frac{4-2x}{3}=\frac{8-4x}{5}$$

8.- Dejamos a la ecuación en solo numeradores y los denominadores pasaran realizando la operación opuesta.

$$5(4-2x)=3(8-4x)$$

9.- Aplicamos la propiedad distributiva.

$$20-10x=24-12x$$

10.- Realizamos transposición de términos de tal manera que las variables queden en el

$$-10x+12x=24-20$$

11.- Realizar las operaciones (suma o resta) según corresponda.

$$2x=4$$

12.- Despejamos el valor de la variable **"x"**

$$x=\frac{4}{2}$$

$$\boldsymbol{x=2}$$

13.- Sustituimos el valor de la variable encontrada en una de las ecuaciones y encontramos el valor. En este caso sustituiremos en la ecuación 2

$$4\boldsymbol{x}+5y=8$$

En lugar de "x" colocaremos el valor $\boldsymbol{x=2}$

$$4\,(\mathbf{2})+5y=8$$

$$8+5y=8$$

$$5y=8-8$$

$$5y=0$$

$$y=\frac{0}{5}$$

$$y=0$$

<u>COMPROBACIÓN</u>

Reemplazamos los valores de ***"x"*** y ***"y"*** en una de las

x= 2 y **y= 0**

$$\begin{cases} \boldsymbol{Ec\ 1} & \boldsymbol{2x + 3y = 4} \\ \boldsymbol{Ec\ 2} & \boldsymbol{4x + 5y = 8} \end{cases}$$

Elegimos a la ecuación 1 y reemplazamos los valores dados

$$\boldsymbol{2x + 3y = 4}$$

$$2(2) + \ 3(0) = 4$$

$$4 + \ 0 = 4$$

$$\boldsymbol{4 = 4} \qquad Se\ cumple\ la\ igualdad$$

Método de Igualación

Método de Igualación

Consiste en despejar la misma variable de ambas ecuaciones del sistema. Una vez despejada, se igualan los resultados, despejando la única variable que queda.

Procedimiento

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2. Se igualan las expresiones obtenidas y se resuelve la ecuación lineal de una incógnita.

3. Se calcula el valor de la otra incógnita sustituyendo la ya hallada en una de las ecuaciones despejadas de primer paso.

Ejercicios por el método de igualación

Ejercicio 1

$$\begin{cases} \mathbf{2x + \ \ y = 50} \\ \mathbf{4x - 5y = 30} \end{cases}$$

1.- primer paso identificamos las ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{2x + \ \ y = 50} & \boldsymbol{Ec\ 1} \\ \mathbf{4x - 5y = 30} & \boldsymbol{Ec\ 2} \end{cases}$$

Se despeja la variable "y" se obtienen las nuevas ecuaciones **Ec 3** y **Ec 4**

Primera Ecuación

$$2x + \ \ y = 50$$

$$\boldsymbol{y = 50 - 2x \ \ Ec\ 3}$$

Segunda Ecuación

$$4x - 5y = 30$$

$$-5y = 30 - 4x$$

$$\boldsymbol{y = \frac{30 - 4x}{-5} \ \ Ec\ 4}$$

Se igualan las ecuaciones **Ec 3** y **Ec 4**

Ec 3 = **Ec 4**

$$50 - 2x = \frac{30 - 4x}{-5}$$

$$-5\,(50 - 2x) = 30 - 4x$$

Ahora, se resuelve la ecuación resultante, que tiene una incógnita

$$-250 + 10x = 30 - 4x$$

$$10x = 30 - 4x + 250$$

$$10x + 4x = 30 + 250$$

$$14x = 280$$

$$x = \frac{280}{14}$$

$$\boldsymbol{x = 20}$$

Una vez identificado el valor de "x", se remplaza en **Ec 3**

$$\boldsymbol{y = 50 - 2x} \quad \boldsymbol{Ec\ 3}$$

$$\boldsymbol{y = 50 - 2(20)}$$

$$y = 50 - 40$$

$$\boldsymbol{y = 10}$$

Solución: (20, 10)

<u>COMPROBACIÓN</u>

Reemplazamos los valores de “**x**” y “**y**” en una de las ecuaciones

x= 20 y **y= 10**

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x + \ \ y = 50} & \boldsymbol{Ec\ 1} \\ \boldsymbol{4x - 5y = 30} & \boldsymbol{Ec\ 2} \end{cases}$$

Elegimos a la en la $\boldsymbol{Ec\ 1}$ y reemplazamos los valores dados

$$2(\mathbf{20}) + \ \mathbf{10} = 50$$

$$40 + \ 10 = 50$$

$$\mathbf{50 = 50} \qquad \textit{Se cumple la igualdad}$$

Ecuación Cuadrática

Ecuación Cuadrática

La ecuación cuadrática presenta la siguiente forma estándar: $\boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, donde a, b y c son números reales, siendo que a no puede ser 0.

$$\boldsymbol{a \ x^2 \ + \ b \ x \ + \ c \ = 0}$$

Término Cuadrático **Término Lineal** **Término Independiente**

Casos de Ecuación Cuadrática

Dependiendo de que si el término lineal, independiente o ambos sean iguales a cero. La ecuación cuadrática puede tomar las siguientes formas, tal como indica el siguiente diagrama.

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

- **COMPLETA**
  - $ax^2 + bx + c = 0$
    con **a,b y c distintas de 0**
- **INCOMPLETAS**
  - $ax^2 = 0$
  - $ax^2 + bx = 0$
  - $ax^2 + c = 0$

Descripción: Casos de una ecuación cuadrática

Ecuaciones de Segundo Grado: Completa

Ecuación de la forma ax^2 + bx + c = 0

Se puede resolver aplicando la factorización de trinomios.

a. Factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Al aplicar este trinomio se debe extraer las raíces del primer y tercer término.

$$\left(a^2 + 2ab + b^2\right) = (a + b)^2$$

El signo del
segundo término

$$\left(a^2 - 2ab + b^2\right) = (a - b)^2$$

El signo del
segundo término

Ejemplo:

Resolver la ecuación: **$9x^2 - 12x + 4 = 0$**

Se procede a extraer las raíces del término cuadrático e independiente:

$$\mathbf{9x^2 \quad - 12x \quad + \quad 4 \quad = 0}$$

$\sqrt{9x^2}$ → 3 x

$\color{red}{2}$ (3x)(2)=12x

$\sqrt{4}$ → 2

Para corrobora **si es un trinomio cuadrado perfecto** se debe multiplica las raíces encontradas por 2, entonces: 2 * 3x * 2 = $\boldsymbol{12x}$. El resultado es el segundo término, entonces se verifica que es un Trinomio Cuadrado Perfecto igual a:

$(3x - 2)^2 = 0$

$(3x - 2)$ $\qquad$ $(3x - 2) = 0$

$3x - 2 = 0 \quad \wedge \quad 3x - 2 = 0$

$3x = -2 \quad \wedge \quad 3x = -2$

$x_1 = 2/3 \quad \wedge \quad x_2 = 2/3$

b. Factorización de un Trinomio de la Forma $x^2 + bx + c = 0$

Resolver la ecuación: $x^2 + 2x - 15 = 0$

La expresión factorizada de este tipo de trinomios es un producto de dos binomios con un término común, el cual se obtiene al extraer la raíz cuadrada del término cuadrático raíz cuadrada de x cuadrada. Los segundos términos de ambos binomios son dos números cuyo producto resulta igual al término independiente y cuya suma es igual al coeficiente del término de primer grado, esto es:

Dos números que multiplicados den **c**

$$x^2 \pm bx \boxed{+} c = 0$$

Encuentra dos números que sumados den **b**

Dos números que multiplicados den **c**

$$x^2 \pm bx \boxed{-} c = 0$$

Encuentra dos números que sumados den **b**

Ejercicio 1

Dos números que multiplicados den **144**

$$x^2 + 26x \boxed{+} 144 = 0$$

Encuentra dos números que sumados den **26**

Descomposición en factores primos

144	2
72	2
36	2
18	2

$\boxed{} \quad \boxed{}$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$$

8 18

8 + 18 = 26

(8) (18) = 144

$$x^2 + 26x + 144 = 0$$

$$(x + 8)(x + 18) = 0$$

$$x + 8 = 0 \qquad x + 18 = 0$$

$$x_1 = -8 \qquad x_2 = -18$$

Resolución Ecuación Cuadrática por Fórmula General

Una ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales; $a \neq 0$. Su fórmula se describe a continuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discriminante de una ecuación de segundo grado

La expresión **b^2 - 4ac** recibe el nombre de **discriminante**. Es el valor que determina el tipo de raíces de la ecuación de segundo grado.

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales, se consideran los siguientes casos:

Si **b^2 - 4ac = 0**, la ecuación tiene **una única** solución real.

Si **b^2 - 4ac > 0**, la ecuación tiene **dos soluciones reales**.

Si **b^2 - 4ac < 0**, la ecuación tiene **dos soluciones complejas.**

Ejemplos:

- El discriminante de la ecuación **$x^2 + 6x + 9 = 0$** es:

$b^2 - 4ac = 6^2 – 4(1)(9) = 0$

Por lo tanto, la ecuación **tiene una única solución real**.

- El discriminante de la ecuación **$2x^2 + 5x - 3$** = 0 es:

$b^2 - 4ac = 5^2 – 4(2) (-3) = 49 > 0$

De modo que la ecuación tiene **dos soluciones reales**.

- El discriminante de la ecuación **$3x^2 + 5x + 6 = 0$** es:

$b^2 - 4ac = 5^2 – 4(3)(6) = -47 < 0$

Luego, la ecuación tiene **dos soluciones complejas**.

Ejercicio:

Resolver el siguiente ejercicio aplicando la Fórmula General, para encontrar las raíces de la siguiente ecuación:

$\mathbf{2x^2 + 3x + 1 = 0}$

Solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se reemplazan los valores: a = 2, b = 3, c = 1

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$\boldsymbol{x_1 = -\frac{1}{2}} \qquad \wedge \qquad \boldsymbol{x_2 = -1}$$

Ecuaciones de Segundo Grado: Incompletas

Ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$

Se puede resolver mediante la factorización (factor común); se basa en usar **el factor común en la expresión** y analizar las condiciones de dichos factores. Ejemplo:

Resolver la ecuación $-2x^2 + 6x = 0$

Se extrae el factor común **2x.**

$$2x(-x + 3) = 0$$

Se igualan los dos factores a 0.

$$2x = 0 \qquad -x+3 = 0$$

Se encuentran los valores de la incógnita x.

$\boldsymbol{x_1} = \mathbf{0}$, $\quad \boldsymbol{x_2} = 3$

Ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$

Se resuelve despejando la incógnita x. Puede tener dos raíces o soluciones reales o no tener ninguna solución real. Ejemplo:

Resolver la ecuación: $x^2 - 9 = 0$

Se suma 9 en ambos lados de la igualdad.

$x^2 - 9 \mathbf{+ 9} = 0 \mathbf{+ 9}$

Se efectúan las operaciones.

$x^2 = 9$

Se extrae la raíz cuadrada.

$x = \pm\sqrt{9}$

Se obtienen las soluciones.

$\mathbf{x_1} = 3$, $\mathbf{x_2} = -3$

Aplicaciones de la Ecuación Cuadrática

Las ecuaciones de segundo grado permiten resolver de manera adecuada y precisa muchos problemas que se plantean en la vida real o que están relacionados con otras áreas del conocimiento.

Ejercicios de aplicación

1. Se tiene un terreno rectangular, sabiendo que el área de un rectángulo es la multiplicación de su base (b) por la altura (a). Al multiplicar los datos dados de la base y la altura, se tiene lo siguiente: $\boldsymbol{b * a = x^2 + 7x + 12}$. A partir de ello, determinar los datos de la base y la altura en función de x.

altura= a

base= b

El área del rectángulo es:

$$\boldsymbol{A = b * a}$$

$$\boldsymbol{A = b * a =} \ x^2 + 7x + 12$$

$$\boldsymbol{A =} \ x^2 + 7x + 12$$

Se procede a factorar, ya que es un trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$

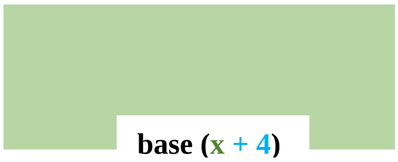
Se obtiene un término común, extrayendo la raíz cuadrada del término cuadrático. Los segundos términos de ambos binomios son dos números cuyo producto resulta igual al término independiente y cuya suma es igual al coeficiente del término de primer grado, esto es:

$x^2 + 7x + 12$

x	**+3**	→	**3x**
x	**+4**	→	**4x**
			7

(x + 3) (x + 4) = 0

altura (x + 3)



base (x + 4)

Por lo tanto, la factorización completa de trinomio en este caso resulta:

(x+4) (x+3) = 0

Por lo tanto, los datos de la base son $x + 4$ y de la altura es $x + 3$.

Respuesta: base= $x + 4$ ∧ altura= $x + 3$.

Función Cuadrática

Función Cuadrática

La forma general de una función cuadrática es la siguiente:

$$\boxed{f(x) = \boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c}}$$

A continuación, se describe cada una de las variables, dónde:

a, b, c: son los coeficientes de la función

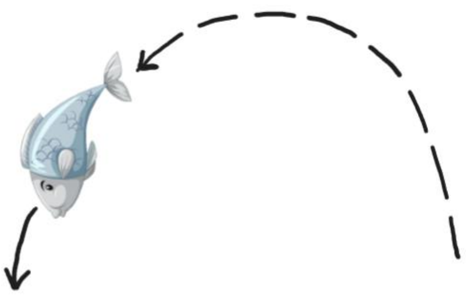
x: representa la variable independiente

f(x): es la imagen de x, puede reemplazarse por la letra “*y*” (variable dependiente)

Por lo tanto, la función se puede expresar de la siguiente manera:

$y = \boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c}$

Una función cuadrática es de la forma f(x) = $\boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c}$, donde a, b y c son números reales; a ≠ 0. A continuación, se muestra un ejemplo de aplicación de función cuadrática.

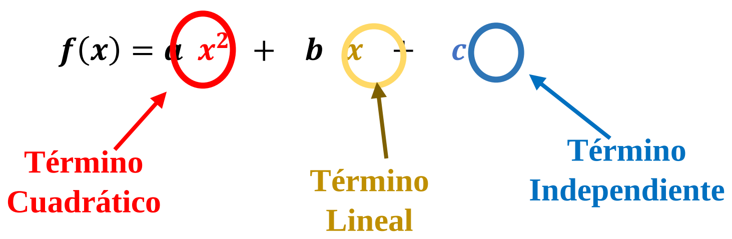


Descripción: Parábola en la trayectoria de un salto de pez

Fuente: Propio de BV- Matemáticas EGB

Términos de la función cuadrática

La función cuadrática tiene está conformada por los siguientes términos:



Descripción: Términos de una ecuación cuadrática

Fuente: Propio de BV- Matemáticas EGB

Elementos de la función cuadrática

Los principales elementos de la función cuadrática son:

- Vértice
- Eje de simetría
- Puntos de corte con el eje de las abscisas
- Punto de corte con el eje de las ordenadas

1. **Vértice (V):** es el punto donde la parábola alcanza su punto máximo o mínimo. Ello depende del coeficiente **“a”:**

El vértice es el punto **máximo** si $a < 0$

El vértice es el punto **mínimo**, si $a > 0$

Para hallar el **valor de la coordenada en x del vértice,** se utiliza la fórmula:

$$\boldsymbol{h} = -\frac{b}{2a}$$

Para hallar el **valor de la coordenada en y del vértice,** se reemplaza en la función el valor obtenido en x

2. **Eje de simetría:** es la recta paralela al eje Y, que pasa por la coordenada x del vértice. Se calcula mediante la fórmula:

$$\boldsymbol{h} = -\frac{b}{2a}$$

3. **Puntos de corte con el eje de abscisas (raíces):** son los puntos donde el valor de la función es 0. Es decir, se debe resolver la función cuadrática igualando a 0, así:

$ax^2 + bx + c = 0$

Se resuelve ***factorizando*** o por medio ***de la ecuación general***:

$$\boldsymbol{x} = \frac{-\boldsymbol{b}^2 \pm \sqrt{\boldsymbol{b}^2 + 4\boldsymbol{ac}}}{2\boldsymbol{a}}$$

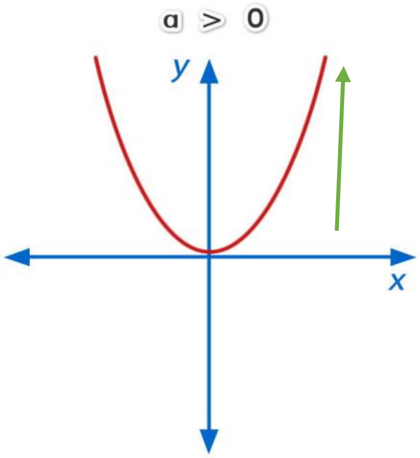
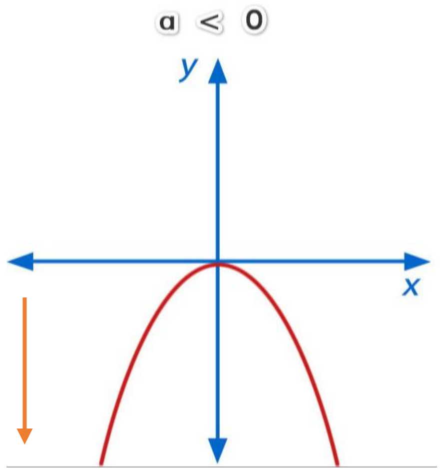
4. **Punto de corte con el eje de ordenadas:** son los puntos donde x tomará el valor de 0 en la función, así:

Dada la ecuación: $y = ax^2 + bx + c$

Reemplazando el valor de 0: $y = a\,(0)^2 + b\ (0) + c$

Cabe recordar que en la parábola se debe tener en cuenta la **orientación o concavidad.**

Para determinar **la orientación de la parábola** se debe tomar en cuenta el coeficiente de la ecuación cuadrática **“a”**, así:

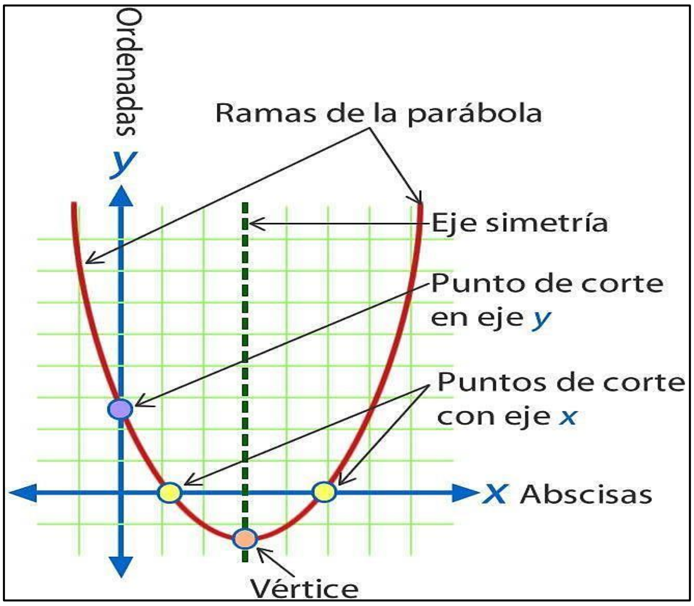
Si **a es mayor a 0**, la parábola se abre hacia **arriba (a>0)**	Si **a es menor a 0**, la parábola se abre hacia **abajo (a<0)**
	

Descripción: Tipos de concavidad de la parábola

Fuente: Portal Educativo, 2022

Representación Gráfica de una función cuadrática

Una característica de la gráfica de una función cuadrática es que será una **parábola**. Dicha parábola tendrá algunas características definidas dependiendo de los valores de la ecuación que la generan. A continuación, en la siguiente gráfica se indican los elementos de una parábola:



Descripción: Elementos de la parábola

Fuente: Portal Educativo, 2022

Ejercicios de la función cuadrática

1. Calcular analíticamente: la orientación, el eje de simetría, el vértice y el corte con el eje de las *y* de la siguiente función cuadrática:

$$f(x) = 5x^2 - 20x + 16$$

$f(x) = 5x^2 - 20x + 16$

$f(x) = ax^2 - bx - c$

Solución: primero se reconoce cual es el valor de a, b y c.

a = 5

b = -20

c = 16

Se determina la orientación de la parábola, observando el coeficiente **"a = + 5"**:

- **Orientación de la parábola**: Se verifica el término cuadrático. En este caso el coeficiente a es mayor a cero (a>0) → **+5** > 0

Descripción: Orientación de la parábola

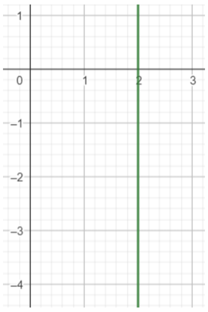
Fuente: Rodó, 2021

- **Eje de simetría**: Se utiliza la fórmula:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{2(5)}$$

$$x = 2$$

- **Vértice:** Como ya se tiene el valor de x del eje de simetría, entonces: **x = 2**



Para encontrar el **Vértice (h , k)** identificamos los coeficientes **a** , **b** y **c** y aplicamos la siguiente formulas

$$h = -\frac{b}{2a} \qquad k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

$y = 5x^2 - 20x + 16$ **a = 5** **b = -20** **c = 16**

$$h = -\frac{b}{2a}$$

$$h = -\frac{-20}{2(5)}$$

$$h = +2$$

Se reemplaza este valor **h = 2** en la función para obtener **"k"**.

$y = 5x^2 - 20x + 16$

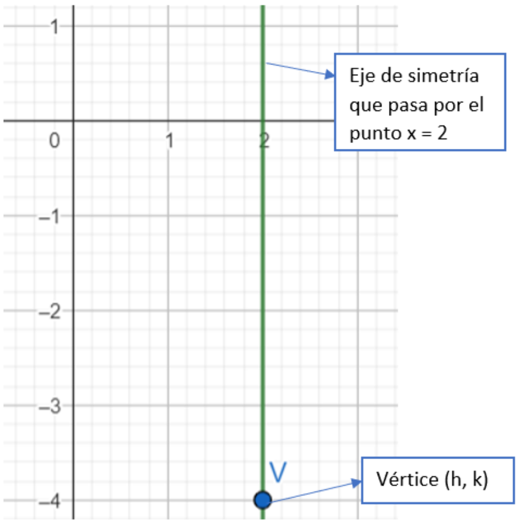
k = 5(2)^2 – 20(2) +16

k = 20 – 40 + 16

k = -4

V= (h , k)

V= (2, -4)



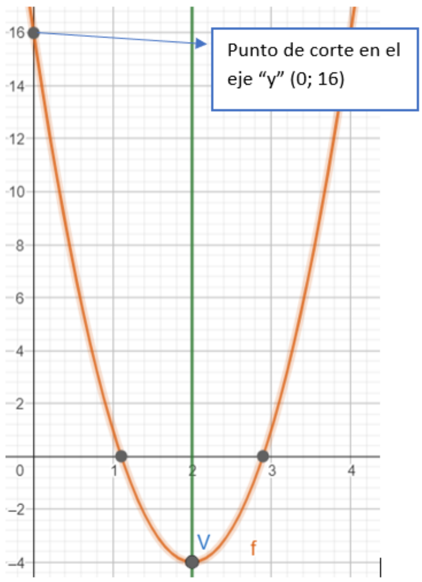
- **Corte eje y.** Para encontrar el corte, se coloca **x = 0,** y se reemplaza en la ecuación.

$y = 5x^2 - 20x + 16$

$y = 5(0)^2 - 20(0) + 16$

Y = 16

Corte eje y (0,16)



2. Crear la tabla de valores y graficar la siguiente función cuadrática:

$$f(x) = 5x^2 - 20x + 16$$

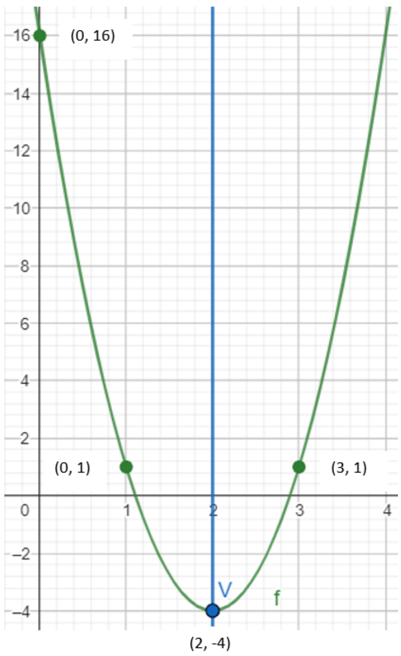
Solución: Se recomienda encontrar el vértice y dar valores cercanos a este. En este caso ya se obtuvo en el literal anterior.

x	$f(x)$
-1	$f(-1) = 5(-1)^2 - 20(-1) + 16 = 41$
0	$f(0) = 5(0)^2 - 20(0) + 16 = 16$
1	$f(1) = 5(1)^2 - 20(1) + 16 = 1$
2	$f(2) = 5(2)^2 - 20(2) + 16 = -4$
3	$f(3) = 5(3)^2 - 20(3) + 16 = 1$

Por lo tanto, se obtienen los siguientes puntos:

x	y
-1	41
0	16
1	1
2	-4
3	1

Se procede a graficar la función cuadrática con los puntos obtenidos en el literal anterior



Análisis Combinatorio

Métodos de conteo

Los métodos de conteo son estrategias utilizadas para determinar el número de posibilidades diferentes que existen al realizar un experimento, entre ellas se puede destacar: Principio Multiplicativo, Diagrama de Árbol, Permutación y Combinación.

Principio Multiplicativo

Si un evento A se puede realizar de «***m***» formas diferentes y luego se puede realizar otro evento B de «***n***» formas diferentes, el número total de formas en que pueden ocurrir A y B es igual a ***m x n.*** Es decir, ambos eventos se realizan, primero uno y luego el otro. **El «y» indica multiplicación.**

Ejemplos:

1. **¿de cuántas formas se puede vestir una persona que tiene 3 pantalones y 3 camisas?**

Para vestirse, la persona se pone el pantalón (***m***) y luego la camisa (***n***), es decir tiene ***m x n,*** lo que significa: 3 x 3 = 9 opciones diferentes de vestirse.

2. **Paula planea ir al cine con sus amigas, y para escoger la ropa que usará, separo 3 blusas y 2 faldas. ¿De cuantas maneras se puede vestir Paula?**

En este caso, Paula debe tomar dos decisiones:

d_1 = Escoger entre 3 blusas = ***n***

d_2 = Escoger entre 2 faldas = *m*

De esa forma Paula tiene ***n * m*** decisiones a tomar o maneras diferentes de vestirse.

n * m = 3* 2 = 6 decisiones.

3. **Al lanzar un dado y una moneda, ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener?**

En este caso la moneda tiene dos eventos posibles: cara o sello ***(m)***, mientras que el dado tiene 6 eventos posibles: 1,2,3,4,5,6 ***(n)***

Eventos posibles= **m*n**
Eventos posibles= 2 x 6 = 12
Eventos posibles=12

Diagrama de Árbol

Es una **representación gráfica** que inicia en una **"raíz"** de la cual salen **"ramas"** que muestran cada uno de los resultados posibles de un experimento. Permite determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Ejemplos:

1. En el menú de una fonda, solo ofrecen limonada que puede ser pequeña, mediana o grande y con hielo o sin hielo. ¿Cuántas posibilidades de limonada existen?

Descripción: Ejemplo de diagrama de árbol

Fuente: Ramos, 2012

Respuesta. Acorde al gráfico se obtienen en total **seis posibilidades.**

Como se puede observar al utilizar el diagrama de árbol se puede obtener cuales y cuantas combinaciones son posibles de obtener. **En este caso son 18 combinaciones detalladas a través del diagrama del árbol.**

Factorial

El factorial de un número entero positivo se define como el producto de todos los números naturales anteriores o iguales a él. Indica la multiplicación de los números enteros desde un número dado, descendiendo hasta el número 1. Se escribe ***n!***, y se lee "***n factorial***". Es importante destacar que por definición el factorial de 0 es 1: **0!=1.**

La fórmula para calcular el factorial es:

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n}\ (\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\ (\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ \ldots\ \mathbf{3} * \mathbf{2} * \mathbf{1}$$

Ejemplo:

5! = 5·4·3·2·1 = 120

Permutación

Es la disposición de **todos los elementos** en un **orden determinado**. Aquí **sí importa el orden**.

Se usa la fórmula: $\boldsymbol{Pn = n!}$

Ejemplo:

¿De cuántas maneras se pueden colocar 7 libros sobre una estantería?

$\boldsymbol{Pn = n!}$

$P7 = 7! = 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = \mathbf{5040}$ maneras.

Combinación

Disposición de una parte del total de elementos sin tener en cuenta el orden. Aquí **no importa el orden de los elementos**. Por ejemplo, si es que tenemos *ab* y *ba*, estas selecciones son consideradas iguales en las combinaciones.

Se usa la fórmula: $\boldsymbol{C_k^n} = \frac{n!}{(n-k)! * k!}$

Dónde:

n: es el número total de elementos en un conjunto

k: es el número de objetos seleccionados

!: es el símbolo de factorial

Ejemplo:

¿Cuántos grupos de 4 alumnos se pueden formar con 17 alumnos aventajados para representar a UEJM en un concurso de preguntas de matemática?

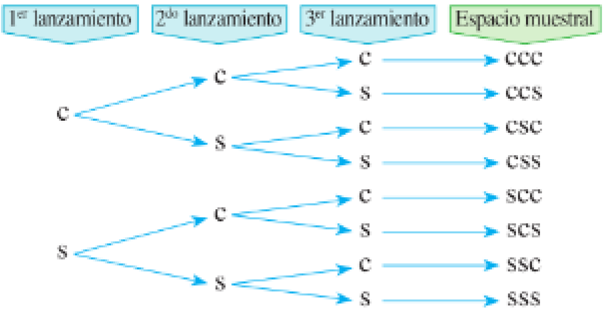
$$\boldsymbol{C_4^{17}} = \frac{17!}{(17-4)! \; * \; 4!} = \frac{17 * 16 * 15 * 14 * 13!}{(13)! * 4!} = \frac{17 * 16 * 15 * 14}{4 * 3 * 2 * 1} = 2380$$

Se pueden formar **2380 grupos de 4 alumnos.**

Ejercicios de repaso

Se lanza al aire una moneda tres veces. Determinar el espacio muestral y los sucesos: A) obtener dos caras y un sello B) obtener por lo menos un sello.

Primero se determina el espacio muestral realizando un diagrama de árbol, así:



S= {ccc, ccs, csc, css, scc, scs, ssc, sss}

Se identifica el suceso de obtener dos caras y un sello por lo tanto tenemos:

A= {ccs ,csc , scc}

Para obtener por lo menos un sello revisamos el espacio muestral por lo tanto tenemos:

B= { ccs, csc, css, scc, scs, ssc, sss}

Calcular el valor de cada expresión

a. 6!

6! =6*5*4*3*2*1

6! =720

b. $3!\ \cdot 4!$

$3!\ \cdot 4! = \ (3*2*1)(4*3*2*1)$

$3!\ \cdot 4! = (\ 6)(24)$

$3!\ \cdot 4! = 144$

c. $\frac{2!\cdot 5!}{3!}$

$$\frac{2!\ \cdot 5!}{3!} = \frac{(2*1)(5*4*3*2*1)}{(3*2*1)} = \frac{2*120}{6} = 40$$

Para un trabajo de matemática se debe elegir un grupo de dos estudiantes entre Juan, Luis, Eduardo, Marcelo y Cristian. ¿Cuántos grupos distintos se puede formar?

$$\boldsymbol{C_k^n} = \frac{n!}{(n-k)! \, * \, k!}$$

$$\boldsymbol{C_2^5} = \frac{5!}{(5-2)! \, * \, 2!} = \frac{5*4*3*2*1}{(3)!*2!} = \frac{5*4*3*2*1}{(3*2*1)(2*1)} = \frac{120}{6*2} = 10$$

Probabilidad

Probabilidad

La probabilidad indica la posibilidad relativa de que ocurra un evento. El valor de la probabilidad es un valor entre 0 y 1. Se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ de\ A}{número\ total\ de\ casos\ de\ S} = \frac{n\ (A)}{n\ (S)}$$

Descripción: Casos de una ecuación cuadrática

Fuente: Matemóvil, 2022

Experimento Aleatorio

Son aquellos experimentos en los que no se puede predecir su resultado. Puede ser repetido bajo las mismas condiciones.

Ejemplos:

- Lanzamiento de una moneda.
- Elegir una persona al azar de una lista y ver cuál es su sexo
- Lanzar un dado con sus caras numeradas del 1 al 6 y observar que número sale
- Extraer una bola al azar de una bolsa con bolas de distinto color.

Evento o suceso

Conjunto de **uno o más** resultados del **experimento aleatorio**. Se representan con letras mayúsculas.

- Si A = {obtener un número 5 al lanzar un dado}, entonces, A= {5}.
- Si B = {obtener un número mayor que 3 al lanzar un dado}, entonces, B= {4, 5, 6}.
- Si C = {obtener un número par al lanzar un dado}, entonces, C= {2, 4, 6}.
- Si D= {obtener un número impar al lanzar un dado}, entonces, D= {1, 3, 5}.

Espacio muestral

Se llama al conjunto de todos los casos posibles, de un experimento específico, y que se designa por E.

Ejemplo:

El **espacio muestral** del experimento de **tirar un solo dado**.

$\boldsymbol{E}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

El **espacio muestral** del experimento de **tirar una sola moneda**. (Cara = C, Cruz = S)

$\boldsymbol{E} = \{C, S\}$

El **espacio muestral** del experimento de **tirar dos monedas.**

$\boldsymbol{E} = \{CC, CS, SC, SS\}$

Ejercicios de Probabilidad

1. En una bolsa se tiene 14 bolitas de colores, todas del mismo tamaño, como indica la figura:

Total, de bolitas: 5 rojas + 5 azules + 4 verdes = 14 bolitas (casos posibles).

Si se saca una bola al azar, calcular las probabilidades de que sea uno u otro color.

Probabilidad de sacar **bolitas de color rojo**

$$\boldsymbol{P(R)} = \frac{\textit{número de bolitas rojas}}{\textit{número total de bolitas}} = \frac{5}{14}$$

Probabilidad de sacar **bolitas de color azul**

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\textit{número de bolitas azules}}{\textit{número total de bolitas}} = \frac{5}{14}$$

Probabilidad de sacar **bolitas de color verde**

$$\boldsymbol{P(V)} = \frac{\textit{número de bolitas verdes}}{\textit{número total de bolitas}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

2. En una caja hay 3586 clavos, de los cuales 311 son defectuosos. Calcular la probabilidad de que, al extraer un clavo de la caja, este defectuoso.

$$\boldsymbol{P(Defectuoso)} = \frac{\textit{número de clavos defectuosos}}{\textit{número total de clavos}} = \frac{311}{3586} = 0{,}0867$$

Respuesta. La probabilidad de extraer un clavo defectuoso de la caja es de 0,0867

3. Se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos igual a:

a) 7 y b) 5

Cada dado puede tener 6 valores posibles, esto quiere decir, que se tiene el producto del **D1XD2** y como se estudió en producto cartesiano se tiene 6*6 pares ordenados, es 36 el total de resultados posibles.

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Cada evento posible puede ser ilustrado en la siguiente tabla:

+	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Descripción: tabla de eventos posibles

Fuente: Gómez. 2020

a) Si S es el evento de obtener una combinación que sume 7, entonces:

S = **{**(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1)**}**

$$P(\textbf{Sume 7}) = \frac{número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ totales} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b) Si S es el evento de obtener una combinación que sume 5, entonces:

S = **{**(1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1)**}**

$$P(\textbf{Sume 5}) = \frac{número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ totales} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

4. De una baraja de 52 cartas determinar la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos: a) sacar un trébol; b) sacar un rey.

Se tiene que en total 52 cartas (números de casos totales)

a) En la baraja hay 13 tréboles, entonces *número de casos favorables* = 13, la probabilidad será:

$$P(\textbf{Trébol}) = \frac{número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ totales} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

b) Se tiene 4 reyes en la baraja, entonces *número de casos favorables* = 4, la probabilidad será:

$$P(Reyes) = \frac{número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ totales} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 0{,}077$$

Descripción: ejercicio ejemplo

Fuente: Gómez. 2020

5. En una bolsa hay 10 papelitos con los números del 1 al 10. Si se extrae un papelito al azar, calcular la probabilidad de obtener un número par.

Se tiene que en total hay 10 papelitos (números de casos totales)

Los números pares posibles que pueden salir son: 2, 4, 6, 8, 10, entonces *número de casos favorables* = 5, la probabilidad será:

$$P(Trébol) = \frac{número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ totales} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

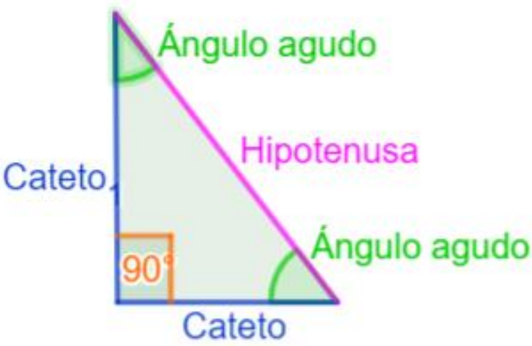
Respuesta. La probabilidad de obtener un número par es 0,5

Triángulo rectángulo

El triángulo rectángulo es aquel tiene un ángulo recto (igual a 90°) y dos ángulos agudos (menores a 90°), la suma de estos ángulos menores es igual a 90°.

Los elementos del triángulo rectángulo:

- **Catetos:** lados del triángulo que forman el ángulo recto.
- **Hipotenusa:** lado de mayor medida y es opuesto al ángulo recto.
- **Ángulo recto:** ángulo que mide 90º que forman los dos catetos.
- **Ángulos agudos:** ángulos menores de 90º. La suma de ambos es de 90º.



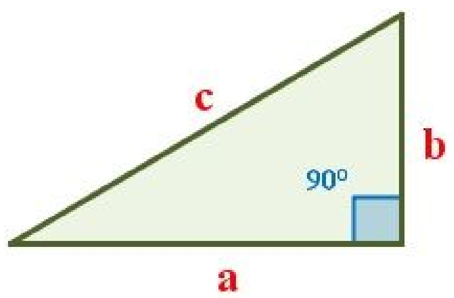
Descripción: Elementos del Triángulo rectángulo

Fuente: Área de matemática EGBS

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$



De la expresión anterior, se obtienen las siguientes igualdades:

Descripción: Triángulo rectángulo

Fuente: Problemas y ecuaciones, 2022

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ para hallar la hipotenusa

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$ para hallar el cateto a.

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ para hallar el cateto b.

El Teorema de Pitágoras tiene aplicaciones en muchos ámbitos de la vida cotidiana, y, se usa, principalmente, para calcular un lado de un triángulo que no conocemos.

Ejercicios de aplicación

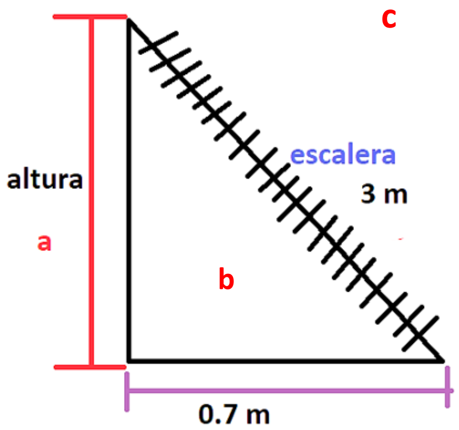
Ejercicio 1.

Calcular la altura que se puede alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared, si la parte inferior se sitúa a 0.7 metros de ésta.

Solución: Como la altura es uno de los catetos. Se aplica el teorema de Pitágoras para calcularla:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{3^2 - (0.7)^2}$$



$$a = \sqrt{9 - 0.49}$$

$$a = \sqrt{8.51}$$

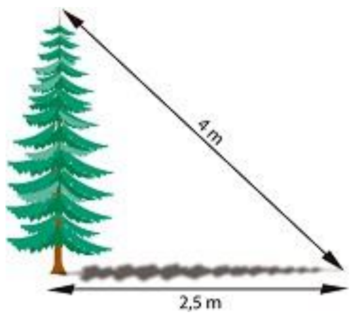
$$a = \pm 2.92$$

Como a es la altura, debe ser positiva.

R. la altura es de: 2.92 m

Ejercicio 2.

Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2.5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros,



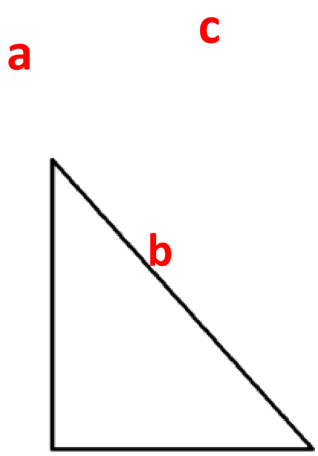
¿cuál es la altura del árbol?

Solución: Se imagina un triángulo rectángulo de modo que:

b, es la sombra del árbol.

a, es la altura del árbol

c, es la distancia desde el árbol al extremo de la sombra.



$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{4^2 - (2.5)^2}$$

$$a = \sqrt{16 - 6.25}$$

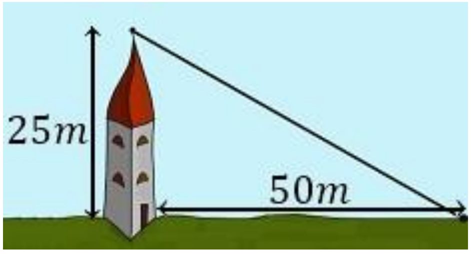
$$a = \sqrt{9.75}$$

$$a = \pm 3.12$$

R. la altura del árbol es **3.12 m**

Ejercicio 3.

Se quiere colocar un cable desde la cima de una torre de 25 metros de altura hasta un punto situado a 50 metros de la base la torre. ¿Cuánto debe medir el cable?



Solución: El cable coincide con la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a = 25m y b = 50m. Se calcula la longitud del cable (es la hipotenusa c):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{25^2 + 50^2}$$

$$c = \sqrt{625 + 2500}$$

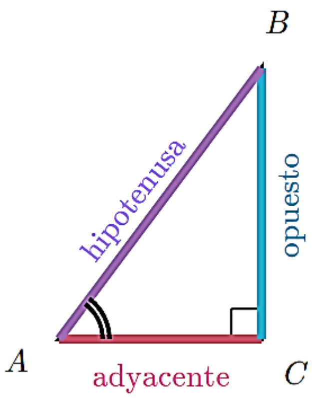
$$c = \sqrt{3125}$$

$$c = \pm 55.90$$

R. El cable debe medir **55,9 metros**.

Razones Trigonométricas

Las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo son relaciones que pueden darse entre los lados, entre las principales se tiene:



$$\sin(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

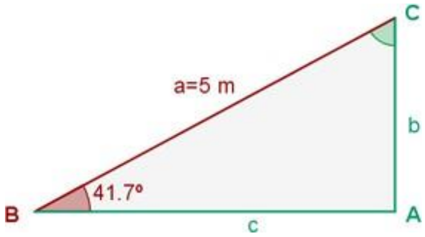
Descripción: Razones trigonométricas

Fuente: Rangel, 2018

Ejercicios de aplicación

Ejercicio 1.

De un triángulo rectángulo ABC, se conoce que: a = 5 m y B = 41.7°. Encontrar el valor de los catetos.



Solución:

Se encuentra el valor de sus catetos con las razones trigonométricas:

$$\boldsymbol{sen\ B} = \frac{\boldsymbol{cateto\ opuesto}}{\boldsymbol{hipotenusa}} \qquad \mathbf{cos\ B} = \frac{\boldsymbol{cateto\ adyacente}}{\boldsymbol{hipotenusa}}$$

$$\boldsymbol{sen\ B} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}; \quad se\ despeja\ \boldsymbol{b} \qquad \mathbf{cos\ B} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}}; \quad se\ despeja\ \boldsymbol{c}$$

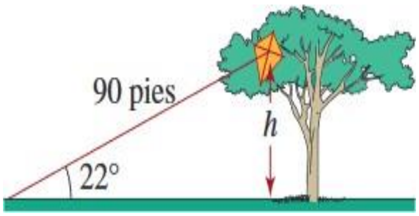
$$\boldsymbol{b} = \mathrm{a} * \mathrm{sen\ B} \qquad \boldsymbol{c} = \mathrm{a} * \mathrm{cos\ B}$$

$$\boldsymbol{b} = 5 * \mathrm{sen}\ (41{,}7°) \qquad \boldsymbol{c} = 5 * \cos\ (41{,}7°)$$

$$\boldsymbol{b = 3,33\ m} \qquad \boldsymbol{c = 3,73\ m}$$

Ejercicio 2.

Una cometa queda atorada en las ramas de la copa de un árbol. Si el hilo de 90 pies de la cometa forma un ángulo de 22° con el suelo. Estime la altura del árbol, calculando la



distancia de la cometa al suelo.

Solución:

Sea h la altura en la que se encuentra la cometa desde el suelo, se tiene:

$$\boldsymbol{sen\ 22°} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\boldsymbol{sen\ 22°} = \frac{h}{90}; \quad se\ despeja\ h$$

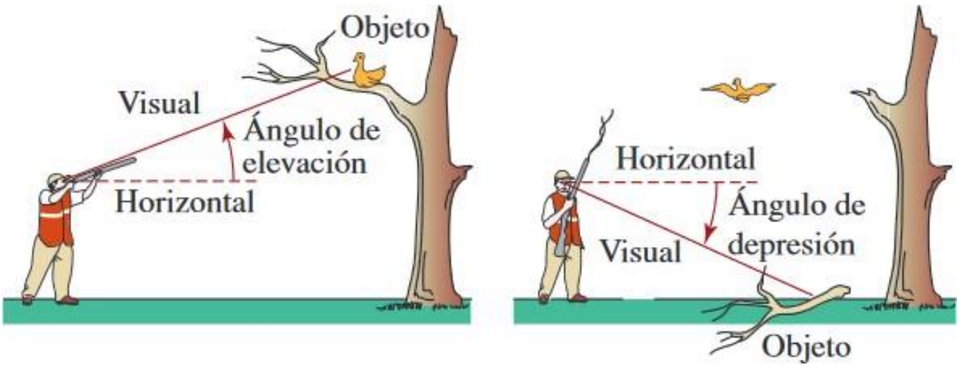
$$\boldsymbol{h} = 90 * \mathrm{sen}\ (22°)$$

$$\boldsymbol{h = 33,71\ pies}$$

Respuesta: La altura estimada del árbol es de **33.71 pies**.

Ángulos de elevación y de depresión

El ángulo entre la visual del observador a un objeto, y la horizontal, tiene un nombre especial. En el caso de la siguiente figura, si la visual es hacia un objeto arriba de la horizontal, el ángulo se llama ángulo de nivel, y en el caso general se llama **ángulo de elevación**, mientras que, si la visual es hacia un objeto abajo de la horizontal, el ángulo se llama **ángulo de depresión**.

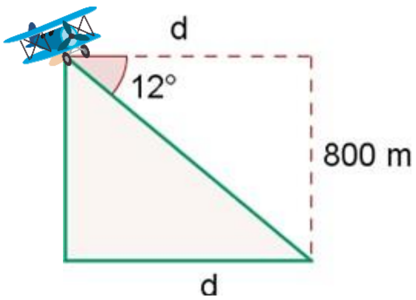


Descripción: ángulo de elevación y depresión

Fuente: De ingenierías, 2019

Ejercicio 1.

Una avioneta que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12°. ¿A qué distancia del pueblo se halla la avioneta?



Solución:

$$\mathbf{tan\,12°} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

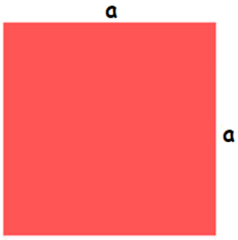
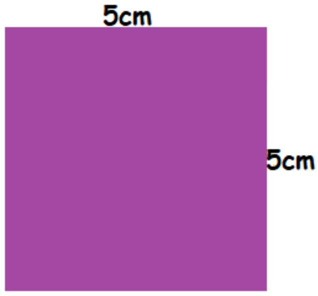
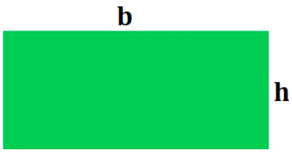
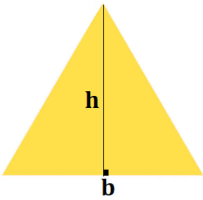
$$\mathbf{tan\,12°} = \frac{800}{d}\ ;\quad se\ despeja\ d$$

$$d = \frac{800}{\tan 12°}$$

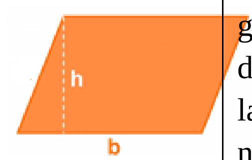
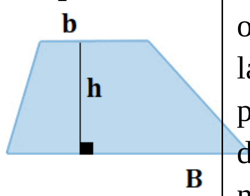
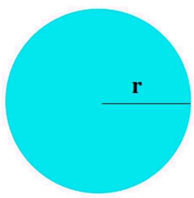
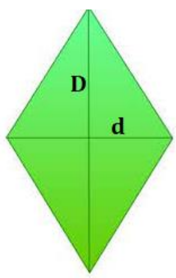
$$d = \mathbf{3763{,}70\ m}$$

Respuesta: La avioneta se encuentra a $\mathbf{3763{,}70}\ \boldsymbol{m}$ del pueblo.

Áreas de Figuras Geométricas

Polígono	**Definición**	**Fórmula**	**Ejemplo**
Cuadrado  	Todos sus lados son iguales	Área = lado x lado A = l x l A = a x a	Hallar el área del cuadrado cuyo lado tiene por medida 5cm  A = $a * a$ A= (5cm) x (5cm) A= 25 cm^2
Rectángulo  	Tiene sus lados iguales de dos en dos.	Área = base x altura A = bxh	Hallar el área del rectángulo de base 6cm y altura 4cm.  A = bxh A = 6cmx 4cm A = 24cm^2
Triángulo  	Es un polígono de tres lados.	$A = \frac{base * altura}{2}$ $A = \frac{b * h}{2}$	Hallar el área del triángulo de base 8cm y altura 10cm. $A = \frac{b * h}{2}$ $A = \frac{8cm * 10cm}{2}$ $A = \frac{80cm^2}{2}$ $A = 40\ cm^2$

Polígono	**Definición**	**Fórmula**	**Ejemplo**

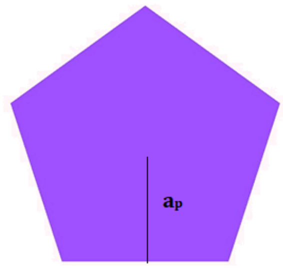
Romboide  	Figura geométrica de cuatro lados que no forman ángulos rectos, de los cuales son iguales los opuestos y desiguales los contiguos.	Área = base x altura A=b *h	Hallar el área del romboide de base 12cm y altura 8cm. $A = b * h$ $A = 12cm * 8cm$ $A = 96cm^2$
Trapecio  	Polígono con dos lados paralelos y dos lados no paralelos.	$A = \frac{base\ menor + Base\ mayor}{2} al$ $A = \frac{b+B}{2} h$	Hallar el área del trapecio de base mayor 15cm, base menor 9cm y altura 10cm. $A = \frac{b+B}{2} h$ $A = \frac{9cm + 15cm}{2} (10c$ $A = \frac{24cm}{2} (10cm)$ $A = 120cm^2$
Círculo  	Figura geométrica delimitada por una circunferencia	Área = pi * radio^2 $A = \pi * r^2$	Hallar el área del círculo cuyo radio es 3cm. $A = \pi * r^2$ $A = \pi * (3cm)^2$ $A = 28{,}27\ cm^2$
Rombo  	Polígono de cuatro lados iguales que no forman ángulos rectos	$A = \frac{Diagonal\ mayor * diagonal\ r}{2}$ $A = \frac{D * d}{2}$	Hallar el área del rombo cuyas medidas son diagonal mayor 9cm y diagonal menor 4cm $A = \frac{D * d}{2}$ $A = \frac{9cm * 4cm}{2}$

			$A = 18\ cm^2$

Área polígono regular. – son polígonos equiláteros, puesto que todos sus lados son de la misma longitud. Su área está dada por:

$$A = \frac{Perímetro * apotema}{2}$$

$$A = \frac{P * a_p}{2}$$



Donde:

Perímetro: resulta de sumar todos los lados del polígono

Apotema: La apotema es el segmento que une el centro del polígono con el punto medio de un lado.

Ejemplo: Hallar el área de un hexágono cuya apotema es 5cm y la medida de uno de sus lados es 6cm

1. La fórmula a aplicarse es:

$$A = \frac{P * a_p}{2}$$

2. Hallamos el perímetro, que es la sumatoria de todos sus lados como es un hexágono sumaremos la misma cantidad 6 veces

P= l+l+l+l+l+l
P= 6cm + 6cm+ 6cm+ 6cm+ 6cm+ 6cm
P= 36 cm

3. Aplicamos la fórmula

$$A = \frac{36cm * 5cm}{2}$$

$$A = \frac{36cm * 5cm}{2}$$

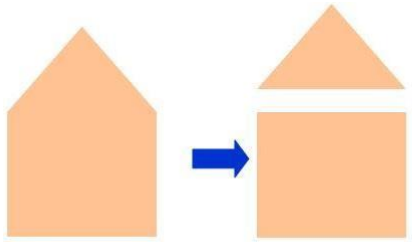
$$A = \frac{180\ cm^2}{2}$$

$$A = 90\ cm^2$$

Aplicación de triángulos rectángulos en áreas compuestas

Luego de conocer como resolver el área de figuras geométricas simples; ahora se puede visualizar figuras compuestas, en las cuales el área de la superficie es el resultado de descomponer dicha figura en otras más básicas para encontrar el área total.

Por ejemplo, se tiene la siguiente figura:

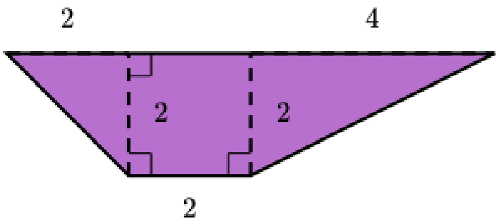


Para poder calcular su área se tiene que **descomponer** la figura de tal manera que se pueda utilizar las fórmulas de área de las figuras ya conocidas, en este caso del triángulo y del rectángulo.

Ejercicios de aplicación

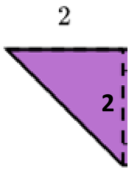
Ejercicio 1.

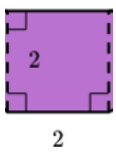
Determinar el área de la siguiente figura:

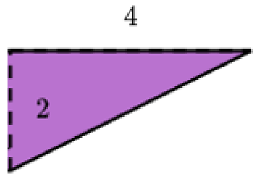


Solución:

La figura se puede descomponer en dos triángulos y un cuadrado en el centro.







$$A = \frac{b * h}{2}$$

$$A = \frac{2 * 2}{2}$$

$$A = \frac{4}{2}$$

$$A = 2\ unidades^2$$

A = l x l

$$A = 2 * 2$$

$$A = 4\ unidades^2$$

$$A = \frac{b * h}{2}$$

$$A = \frac{4 * 2}{2}$$

$$A = \frac{8}{2}$$

$$A = 4\ unidades^2$$

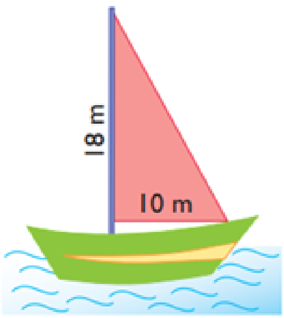
2 + 4 + 2 = 10

El área de la figura es 10 unidades cuadradas.

Ejercicios de aplicación en la vida real

Los triángulos rectángulos permiten calcular las alturas de los objetos de pie accesible como edificios, faros, árboles, postes de luz y también para calcular distancias entre puntos, uno de ellos inaccesible como anchura de los ríos, distancia de la costa a un barco, etc.

Ejercicio 1. La vela de un barco es de lona y tiene forma de triángulo rectángulo; sus catetos miden 10 m y 18 m. El metro cuadrado de lona vale $15. ¿Cuánto cuesta la lona para hacer la vela?



Solución:

A triángulo = (b * h) / 2

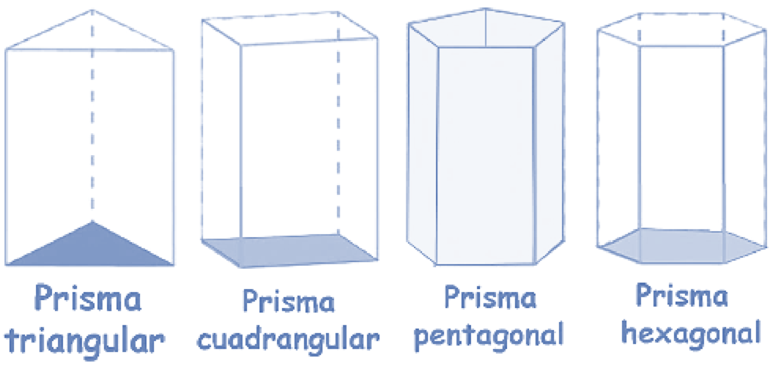
A = (10 * 18) /2

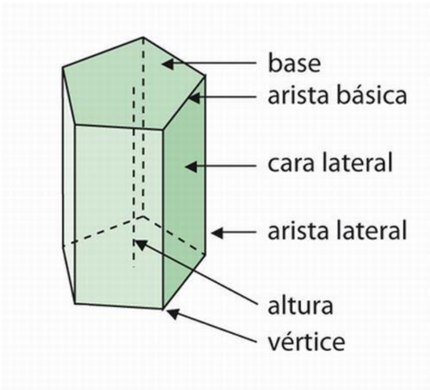
A = 90 * 15 = $1350

La lona para hacer la vela cuesta $ 1350.

Un prisma regular es un poliedro con **dos bases** y caras laterales formadas por rectángulos o paralelogramos.

Los prismas se denominan según el polígono de su base:



Elementos del Prisma	
	**Bases (B):** polígonos regulares, cada prisma tiene dos bases, iguales y paralelas.
	Caras: son rectángulos, el número de caras es igual al número de lados de la base.
	Altura (h): es la distancia entre las dos bases.
	Vértices: puntos donde coinciden las caras.
	Aristas: cada uno de los lados de las caras.

Área Lateral	+	**2 Área de la base triangular**	=	**Área Total**
$A_L = P_B \cdot h_B$		$2A_B$		$A_T = P_B \cdot h_B + 2A_B$

Área Lateral	+	**2 Área de cualquier base**	=	**Área Total**
$A_L = P_B \cdot h$		$\cancel{2}\left(\frac{P_B * a_p}{\cancel{2}}\right)$		$A_T = P_B(h + a_p)$

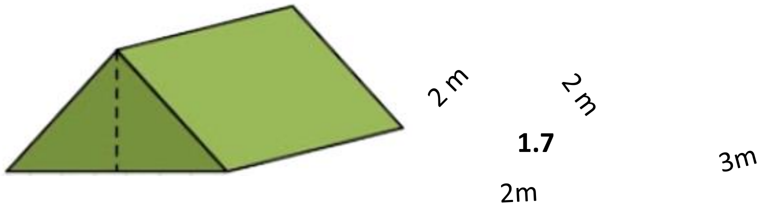
Donde:

P_B: Perímetro de la base

h: altura

Ejercicios Resueltos

1. Carlos necesita confeccionar una tienda de campaña con las medidas que se muestra en la figura. Calcular la cantidad de tela que se necesita.



Solución:

Perímetro de la base

P_B = 2+2+2

P_B = 6 cm

Área Lateral

$$\boldsymbol{A_L = P_B \cdot h}$$

$$A_L = 6(3)$$

$$\boldsymbol{A_L = 18\ cm^2}$$

Área de la base

$$A_B = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_B = \frac{2 * 1.7}{2}$$

$$\boldsymbol{A_B = 1.7\ \mathrm{cm}^2}$$

Área Total

$$\boldsymbol{A_T = 2A_B + A_L}$$

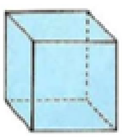
$$A_T = 2(\mathbf{1.7}) + \mathbf{18}$$

$$A_T = 3.4 + 18$$

$$A_T = 21.4\ cm^2$$

R: Se necesitan 21.4 cm^2 de tela

Cuando el prisma es de base cuadrada se puede tener dos casos: el **paralelepípedo** de base rectangular y el **cubo** que tiene sus lados de la base y aristas iguales.



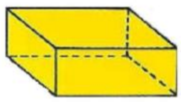
cubo

El área lateral:

$$A_L = 4l^2$$

El área total:

$$A_T = 6l^2$$



paralelepípedo

El área lateral:

$$A_L = 2(a * c + b * c)$$

El área total:

$$A_T = A_L + A_B = (a * c + b * c) + 2(a * b)$$

Ejercicios Resueltos

1. Julia va a forrar la parte lateral de una caja en forma de cubo con papel regalo y necesita saber la cantidad de papel que requiere.

Solución:

Se trata de encontrar el área lateral de un cubo.

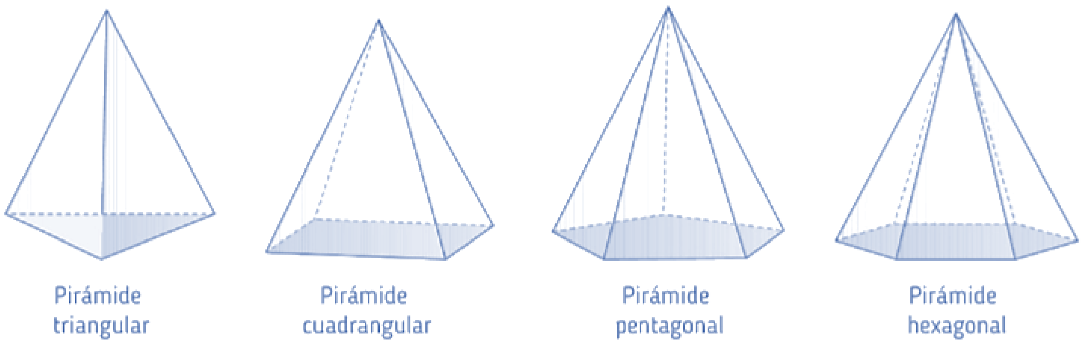
$A_L = 4l^2 = 4\ (21)^2 = 1764\ cm^2$

Julia requiere 1764 cm^2 de papel para forrar la caja.

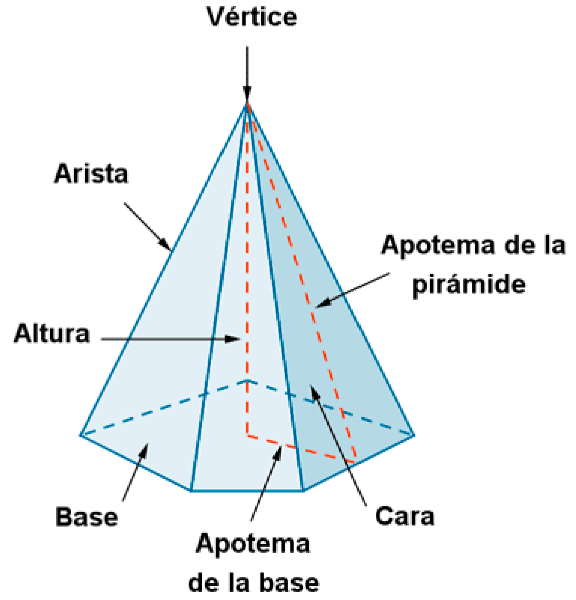
Pirámides

Es un poliedro con una base que puede ser cualquier polígono y sus caras son triangulares. La altura de la pirámide va del vértice a la base y es perpendicular a esta.

Las pirámides se denotan según su base:



Elementos de la pirámide	
	Base: polígono regular; no toca al vértice.
	Caras: triángulos laterales.
	Aristas: segmentos donde se encuentran dos caras de la pirámide.
	Altura (h): distancia de la base al vértice de la pirámide.
	Vértice de la pirámide (V): punto donde confluyen las caras laterales triangulares.
	Apotema de la pirámide (ap): distancia del vértice a un lado de la base.

	**Apotema de la base (apb):** distancia de un lado de la base al centro de ésta.

Área Lateral	+	**Área de la base**	=	**Área Total**
$A_L = \frac{Pb \cdot ap}{2}$		A_b		$A_T = \frac{Pb \cdot ap}{2} + A_b$

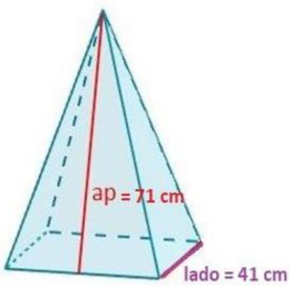
Donde:

Pb: Perímetro de la base

ap: Apotema

Ejercicios Resueltos

1. Para regalarle a su sobrina, Roger decide mandar a elaborar una tienda de lona triangular, si la base es un cuadrado de lado 41 cm y la apotema de la pirámide es 71 cm. ¿Cuál es la cantidad de lona que debe comprar? (Calcular el área total)

Solución:

Para encontrar el área total de la pirámide, se suman: el área de la base y el área lateral:

Primero se calcula el perímetro de la base

Pb = 41 • 4

Pb = 164 u

Área lateral

$$\boldsymbol{A_L = \frac{Pb \cdot ap}{2}}$$

$$A_L = \frac{164 \cdot 71}{2}$$

$$A_L = \frac{11644}{2}$$

$$\boldsymbol{A_L = 5822\ cm^2}$$

Área de la base

$$A_B = lado * lado$$

$$A_B = 41 \cdot 41$$

$$\boldsymbol{A_B = 1681}$$

Área Total

A_T = A_B + A_L

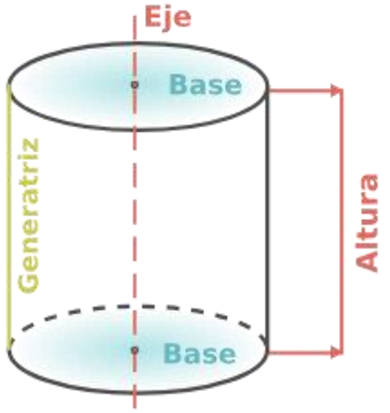
$$A_T = 1681 + 5822$$

$$A_T = 7503\ cm^2$$

Se requieren 7503 cm^2 de lona.

Cilindros

El cilindro circular es un cuerpo geométrico generado de un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

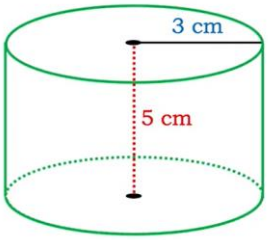
Elementos del Cilindro	
	**Eje:** es el lado fijo alrededor del cual gira el rectángulo.
	Generatriz: segmento perpendicular a la base y cuyos extremos pertenecen a las circunferencias que las limitan.
	Altura (h): es la distancia entre las dos bases. Esta distancia es igual a la generatriz.
	Base: son círculos iguales y paralelos. El radio del círculo es también del cilindro.

Área Lateral	+	**2 Área de la base**	=	**Área Total**
$\boldsymbol{A_L = 2\pi r \cdot h}$		$\boldsymbol{2A_b = 2\pi r^2}$		$\boldsymbol{A_T = 2\pi r(r + h)}$

Donde:
r: radio
h: altura

Ejercicios Resueltos

1. Calcular el área total del siguiente cilindro:



Datos:

r = 3 cm

h = 5 cm

$\pi = 3.14$

Solución:

Se reemplazan los datos en la fórmula

$$\boldsymbol{A_T = 2\pi r(r + h)}$$

$$A_T = 2\pi(3)(3 + 5)$$

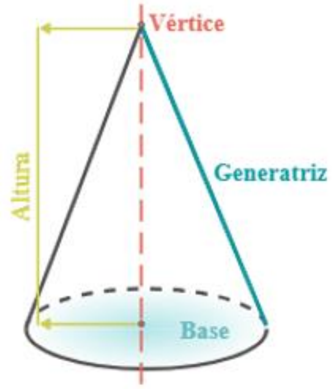
$$A_T = 15\pi(8)$$

$$A_T = 120\pi$$

$$A_T = 376.8\ cm^2$$

Conos

El cono es un cuerpo geométrico generado al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Se llama base al círculo inferior del cono y g a la hipotenusa que confluye en el vértice.

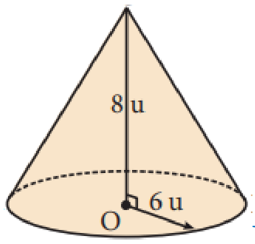
Elementos del Cono	
	**Generatriz (g):** línea que al girar sobre el eje del cono engendra la superficie cónica de revolución.
	Vértice (V): punto donde confluyen las infinitas generatrices
	Altura (h): distancia del plano de la base al vértice de la pirámide
	Base (B): cara plana inferior; en el cono circular recto, es un círculo.

Área Lateral	+	**Área de la base**	=	**Área Total**
$\boldsymbol{A_L = \pi r g}$		$\boldsymbol{A_b = \pi r^2}$		$\boldsymbol{A_T = \pi r(r+g)}$

Donde:
r: radio
h: altura

Ejercicios Resueltos

1. Calcular el área total del siguiente cono.



10 u

Datos:

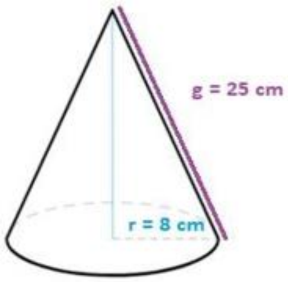
h = 8
r = 6
g = 10

Solución:

$$\boldsymbol{A_T = \pi r(r+g)}$$
$$A_T = \pi 6(6+10)$$
$$A_T = \pi 6(16)$$
$$A_T = 96\pi$$
$$A_T = 96(3.14)$$

$A_T = 301.44\ u^2$

2. Jesús necesita confeccionar bonetes para la fiesta de cumpleaños de su hija y necesita saber cuánta cartulina comprar. Si el radio es de 8 cm y la generatriz de 25 cm, ¿cuál es el área lateral de cada bonete?



Solución:

Para encontrar el área lateral del cono se tiene la fórmula:

$\boldsymbol{A_L} = \boldsymbol{\pi}\ \boldsymbol{r} g$

$\boldsymbol{A_L} = 3{,}14 * 8 * 25$

$\boldsymbol{A_L} = \mathbf{628\ cm^2}$

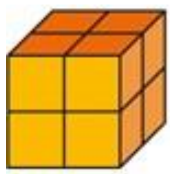
Se requieren 628 cm^2 de cartulina para el bonete.

Volumen de Cuerpos Geométricos

El volumen es la cantidad de **espacio tridimensional** que ocupa un objeto. El volumen se mide en **unidades cúbicas**.

Figura 1.

Ejemplo, el siguiente prisma rectangular de volumen de 8 unidades cúbicas porque está hecho de 8 cubos unitarios.



Cada capa de este cubo tiene Volumen 8

2 * 2 cubitos.

Tiene 2 capas de alto.

Hay 2 * 2 * 2 = 2^3 = 8 cubitos

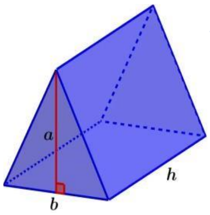
Nota. Volumen de cubo, elaborado por el Área de Matemática EGBS

Volumen de un Prisma

El **volumen de un prisma** es el **producto** del **área de la base** (Ab) por la **altura del prisma** (*h*).

$$\mathbf{V} = A_B * h$$

La fórmula es sencilla, pero en ocasiones el cálculo se complica según lo difícil del cálculo del área de la base. A continuación, se muestran ejemplos del cálculo del volumen de algunos prismas.



Prisma triangular: tiene como bases dos triángulos.

Ejemplo:

a = 8,66 cm

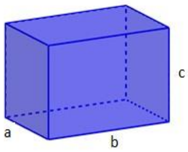
b = 10 cm

h = 20 cm

$$\boldsymbol{V} = A_{Base} * h$$

$$V = \frac{(10 * 8{,}66)}{2} * 20$$

$$\boldsymbol{V} = 43{,}3 * 20 = \mathbf{866\,cm^3}$$



Prisma rectangular: tiene como bases dos rectángulos.

Ejemplo:

a = 21 cm

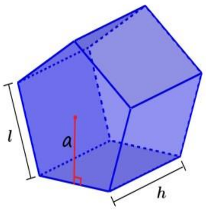
b = 38 cm

c = 30 cm

$$\boldsymbol{V} = A_{Base} * h$$

$$V = (21 * 38) * 30$$

$$\boldsymbol{V} = 798 * 30 = \mathbf{23940\,cm^3}$$



Prisma pentagonal: tiene como bases dos pentágonos.

Ejemplo:

a = 5 cm

l = 7,265 cm

h = 14 cm

$$\boldsymbol{V} = A_{Base} * h = \frac{(P * ap)}{2} * h$$

$$V = \frac{(7.265 * 5 * 5)}{2} * 14 = \mathbf{1271{,}375\,cm^3}$$

Volumen de una Pirámide

El **volumen de una pirámide** es un tercio del área de la base de la pirámide y su altura.

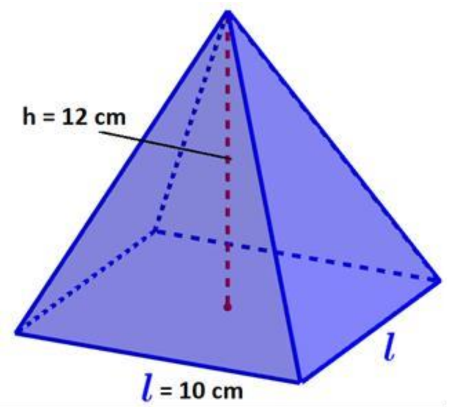
$$V = \frac{\boldsymbol{A_B} * \boldsymbol{h}}{3}$$

La **altura de la pirámide** es el **segmento perpendicular** a la **base**, que une la **base** con el **vértice**. Para calcularla se aplica el teorema de Pitágoras o funciones trigonométricas, estudiadas en el tema 1 de esta unidad.

Al igual que los prismas las pirámides toman el nombre de la figura geométrica que tienen en la base. (*Volumen de una pirámide*, 2022)

Ejemplo:

Dada la siguiente pirámide cuadrangular, calcule su volumen.



$$V = \frac{A_B * h}{3}$$

$$V = \frac{10^2 * 12}{3}$$

$$V = \frac{100 * 12}{3}$$

$$V = \frac{1200}{3} = 400\ cm^3$$

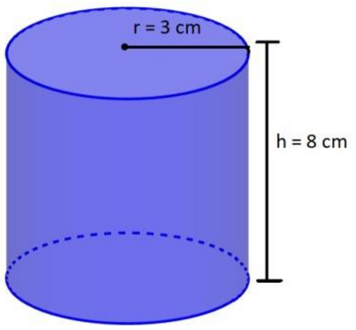
Volumen de un Cilindro

El cilindro circular es un cuerpo geométrico generado por la revolución de un rectángulo alrededor de uno de sus lados. (*Volumen de un cilindro*, 2022).

$$V = \pi * r^2 * h$$

Ejemplo:

Dado el siguiente cilindro calcule su volumen.



$$V = \pi * r^2 * h$$

$$V = \pi * 3^2 * 8$$

$$V = 226,19\ cm$$

Volumen de un Cono

La fórmula general del volumen de un cono es:

$$V = \frac{A_B * h}{3} = \frac{\pi * r^2 * h}{3}$$

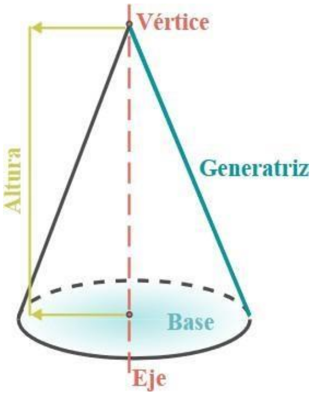
Algunos ejercicios dan como datos ciertos elementos del cono por lo que se considera recordarlos:

Base: es la cara plana inferior del cono, en el cono circular recto, es un círculo cuyo radio es uno de los catetos del triángulo generador.

Altura: distancia del plano de la base al vértice del cono.

Vértice: punto donde confluyen las infinitas generatrices.

Generatriz: línea que al girar sobre el eje del cono engendra la superficie cónica de revolución.



Superficie generatriz (*Sg*): en el cono recto de revolución, es el triángulo rectángulo que lo engendra al girar 360° sobre uno de sus catetos, que es el eje de rotación y, que es a su vez, la altura del cono. El otro cateto es el radio de la base. La hipotenusa la generatriz (g). (*Volumen de un cono*, 2022).

Ejemplo:

Hallar el volumen de un cono recto de 3 de radio y 5 de generatriz.

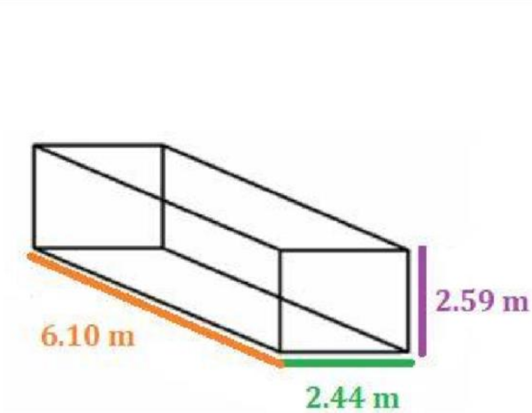
La altura h se obtiene por el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo con un cateto de r = 3 y una hipotenusa g = 5. Luego con el dato se calcula el volumen al reemplazar los datos en la fórmula.

$$\boldsymbol{h} = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{\pi} * \mathbf{3^2} * 4}{3} = \mathbf{12\pi}$$

Ejercicios de aplicación

1. Una nueva constructora ha diseñado un modelo de vivienda utilizando dos contenedores. Las dimensiones son las siguientes: ancho 2.44 m, alto 2.59 m y largo 6.10 m. ¿Cuál será el volumen total que ocupará la vivienda?



Solución:

Para encontrar el volumen de un contenedor, se aplica la fórmula del volumen del prisma:

$\mathbf{V_P} = A_B * h$

$\mathbf{V_P} = (2.44\text{ m})(6.10\text{ m})(2.59\text{ m})$

$\mathbf{V_P = 38.55\ m^3}$

Para encontrar el volumen de la casa, se tiene dos contenedores; por tanto, se multiplica el volumen obtenido por dos.

$\mathbf{V_{casa}} = (38.55) * 2 = \mathbf{77.1\ m^3}$

Referencias

Ministerio de Educación. (2010) Libro de Matemática 10 EGB. Ministerio de Educación. Pdf. https://librosministerio.com/matematicas-10-primaria/

Pérez, Julián y Gardey, Ana. (2015). Definición de relación matemática. https://definicion.de/relacion-matematica/

Profesor en Línea. (2021). Plano Cartesiano. https://www.profesorenlinea.cl/geometria/Plano_Cartesiano.html

FISICALAB (2023). Dominio de una función. https://www.fisicalab.com/apartado/dominio-funcion

Matesfácil. (2021). *Continuidad y monotonía de funciones*. https://www.matesfacil.com/funciones.htm

Morena, M. (2015). *Función Real.* Matemáticas Modernas. https://matematicasmodernas.com/funcion-real

La matemáticas.eu. La función lineal. Ecuación de la recta. Recuperado el 19 de diciembre del 2022 de https://lasmatematicas.eu/la-funcion-lineal-ecuacion-de-la-recta/

Problemas y Ecuaciones. (01 de enero de 2021). *Funciones lineales*. https://www.problemasyecuaciones.com/funciones/lineales/funcion-lineal-problemas-resueltos-grafica-pendiente-interseccion-ejes-paralelas.html

Requena, Bernat. (2015). *Función Lneal.* Universo Fórmulas. https://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/funcion-lineal/

Superprof. (2022) Ecuación explícita de la recta. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/recta/ecuacion-de-la-recta-en-forma-explicita.html

Los Castaños Online *(2020). Tema 3: Sistema de Ecuaciones: Método Gráfico*. https://www.loscastanoselsalvadorschool.com/post/tema-3-sistema-de-ecuaciones-m%C3%A9todo-gr%C3%A1fico

Matesfacil (2013). Sistemas de ecuaciones método gráfico. https://www.matesfacil.com/ESO/sistema-ecuaciones/metodo-grafico/metodo-grafico-sistemas-ecuaciones-lineales-resueltos-grafica-recta-interseccion-solucion-interseccion.html

Superprof (2007). Que significa sistema de ecuaciones lineales en Matemática. https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/algebralineal/sistemas-lineales.html

Los Castaños Online *(2020). Tema 3: Sistema de Ecuaciones: Método Gráfico*. https://www.loscastanoselsalvadorschool.com/post/tema-3-sistema-de-ecuaciones-m%C3%A9todo-gr%C3%A1fico

Matesfacil (2013). Sistemas de ecuaciones método gráfico. https://www.matesfacil.com/ESO/sistema-ecuaciones/metodo-grafico/metodo-grafico-sistemas-ecuaciones-lineales-resueltos-grafica-recta-interseccion-solucion-interseccion.html

Superprof (2007). Que significa sistema de ecuaciones lineales en Matemática. https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/algebralineal/sistemas-lineales.html

Yo Soy Tu Profe (2020). *Sistema de ecuaciones | Teoría y ejercicios*. https://yosoytuprofe.20minutos.es/2016/06/03/sistema-de-ecuaciones/

BeeOnClick Web Solutions (www.beeonclick.es). (s. f.). *Montero Espinosa - Academia universitaria en Madrid - Ejercicios resueltos*. https://monteroespinosa.com/descargas/ejercicios-resueltos/colegio/sistemas-de-ecuaciones/metodo-de-igualacion

MINEDUC, (2000). *Matemática Básica Superior*. Recuperado el 22 de junio del 2021 de: https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2019/01/MATEMATICA-BASICA-SUPERIOR.pdf

Método de igualación – Matemáticas fáciles. (s. f.). https://blogs.ua.es/matesfacil/secundaria/ecuaciones/metodo-de-igualacion/

marc.gisbert@matricesydeterminantes.com. (2021, 8 julio). *Regla de Cramer*. matrices y determinantes. https://www.matricesydeterminantes.com/sistemas-de-ecuaciones/regla-de-cramer-ejemplos-y-ejercicios-resueltos/

Madriod. Método de CRAMER. https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2018/12/06/146012

PortalEducativo, (s.f). *Sistemas de ecuaciones lineales*. Recuperado el 22 de junio del 2021 de: https://www.portaleducativo.net/segundo-medio/45/sistema-de-ecuaciones-lineales

Cabezon,M. *Resolución de sistemas por reducción*. (s. f.). http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/ecuaciones/quincena4_contenidos_2e.htm

Duarte, J. Sánchez, J. (2000). *Sistema lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas*. https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0045-01/secciones/presentacion.html

Matesfacil. *Método de Sustitución, Reducción e Igualación (sistemas de ecuaciones)*. (s. f.). Recuperado el 15 de diciembre del 2022 de: https://www.problemasyecuaciones.com/Ecuaciones/sistemas/metodos-resolucion-sistemas-sustitucion-igualacion-reduccion-ejemplos.html

Matesfacil. *Método de sustitución*(s. f.). Recuperado el 15 de diciembre del 2022 de : https://blogs.ua.es/matesfacil/secundaria/ecuaciones/metodo-de-sustitucion/

PortalEducativo, (s.f). *Sistemas de ecuaciones lineales*. Recuperado el 22 de junio del 2021 de: https://www.portaleducativo.net/segundo-medio/45/sistema-de-ecuaciones-lineales

Ruiz, M. (2020). ¡Método de igualación! Practica con estos sistemas de ecuación. https://yosoytuprofe.20minutos.es/2020/02/06/metodo-de-igualacion-para-resolver-sistemas-de-dos-ecuaciones/

Disfruta de las matemáticas. (s.f). *Álgebra. Ecuaciones cuadráticas*. Recuperado el 23 de mayo del 2023, de https://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/ecuaciones-cuadraticas.html

Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa (ILCE). (2021). Ecuaciones Cuadráticas incompletas. Recuperado el 18 de mayo del 2023, de http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/telesec/curso3/htmlb/sec_34.html

Morena, L. M. A. (2014, 5 octubre). *Resolver ecuaciones cuadráticas paso a paso | Matemáticas modernas*. Matematicas Modernas. https://matematicasmodernas.com/resolver-ecuaciones-cuadraticas-paso-paso/

Portal Educativo. (2022, 31 de marzo). *Función cuadrática: Parábola*. Portal Educativo. https://www.portaleducativo.net/tercero-medio/10/funcion-cuadratica-parabola

Rodó, P. (2021, 1 de junio). *Función cuadrática*. Economipedia. https://economipedia.com/definiciones/funcion-cuadratica.html

Huera, G. (2023). *Neurochispas. Ejercicios de Combinaciones Resueltos y para Resolver*. https://www.neurochispas.com/wiki/ejercicios-de-combinaciones/

Ramos (2012). Métodos de conteo.https://es.slideshare.net/crg110886/metodos-de-conteo-11963410

Macías, O. (2021). *Diagrama de arbol (Tecnicas de conteo) con ejemplos o ejercicios resueltos*. [Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=BwOgWVx5uZM

Gómez. (2020, marzo 18). *Explicación de los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y evento o suceso en combinatoria* [Video]. You tube. https://www.youtube.com/watch?v=tQh29_Noo9w

Matemóvil. (2022). Experimento aleatorio, espacio muestral, evento y probabilidad. https://matemovil.com/experimento-aleatorio-espacio-muestral-evento-y-probabilidad/

Molina, S. (2023, febrero 23). *La probabilidad: qué es y cómo la utilizamos en el día a día*. Smartick. https://www.smartick.es/blog/matematicas/probabilidad-y-estadistica/probabilidad-que-es/#comments