UNIDAD EDUCATIVA JUAN MONTALVO

EDUCANDO CON VERDAD, CIENCIA Y LIBERTAD

C12 Modalidad a Distancia – Virtual

Matemática

Guía de Estudios para Examen de Ubicación

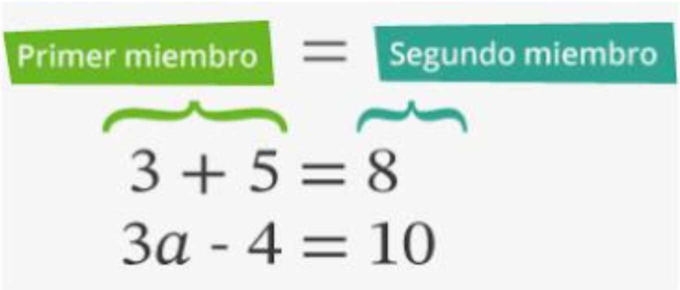
1ro BGU

Índice:

Igualdades y Ecuaciones

Igualdades

Igualdad matemática es la proposición de equivalencia existente entre dos expresiones algebraicas conectadas a través del signo = en la cual, ambas expresan el mismo valor



Descripción: Igualdades
Fuente: Portal Académico

Las igualdades pueden ser numéricas, si solamente comparan números relacionados mediante las operaciones, o algebraicas, si comparan expresiones que involucran números y letras.

Ejemplo:

$$2 + 5 = 7 \qquad \boldsymbol{igualdad\ numérica}$$

$$a + b = 0 \qquad \boldsymbol{igualdad\ algebraica}$$

Ecuaciones

Definición: Las ecuaciones son igualdades algebraicas que, al sustituir las letras por ciertos valores, se convierten en igualdades numéricas.

Elementos de una ecuación

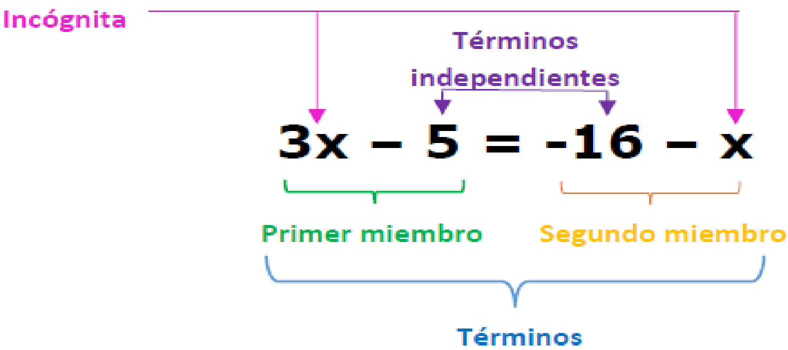
Una ecuación posee varios elementos:

• Términos

• Miembros

• Incógnitas

• Términos independientes



Características:

- La variable está elevada al exponente 1. $(x^1 = x)$ (todo número elevado al exponente 1 es igual al número base)
- Puede usarse cualquier letra para denotar la incógnita (x, y, z…etc) y los coeficientes son números reales.
- Mediante transformaciones equivalentes se puede llevar a la forma a x + b = 0 (con a ≠ 0.

Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico

El Planteamiento de la ecuación, correspondiente a cada problema, requiere el saber expresar el lenguaje algebraico las condiciones que en el lenguaje ordinario contiene el enunciado del problema.

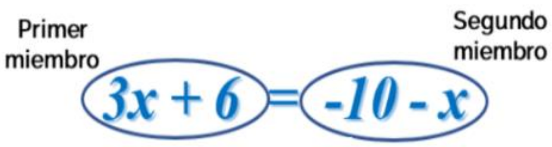
Ejemplos:

FORMA ESCRITA	LENGUAJE MATEMÁTICO
La edad de Pedro	x
El número de libros	n
El dinero de Gladys	d
El doble de un número	2x
El cuádruplo de tu edad	4b
La mitad de un número	n/2
Los ¾ de tu dinero	$\frac{3n}{4}$

Ecuaciones Lineales

Una ecuación de primer grado con una incógnita (también llamada ecuación lineal) es una expresión de la forma $ax + b = c$, donde a, b y c son números reales y el exponente de la incógnita x es 1.

En una ecuación la expresión que se antepone al signo (=) se llama el primer miembro de la ecuación; la expresión que sigue al signo (=) se llama el segundo miembro de la ecuación.



Descripción: Representación de partes de la ecuación lineal
Fuente: Campus Digital UG

Ejemplo:

1) $7x = 56$
2) $x - 20 = 8$
3) $2x + 4 = x - 5$
4) $\frac{2}{5}x + 1 = 0$

Resolución de ecuaciones lineales

Para resolver ecuaciones de primer grado, se aplica la transposición de términos, que consiste en los siguientes puntos:

Ecuación	Proceso en su forma abreviada	Solución
$x + 3 = 8$	Cuando un término, en un lado de la igualdad está **SUMANDO**, pasa al otro miembro **RESTANDO**	$x + 3 = 8$ $x = 8 - 3$ $x = 5$
$2x + 3 = 5x$	Cuando un término, en un lado de la igualdad está **RESTANDO**, pasa al otro miembro **SUMANDO**	$2x + 3 = 5x$ $2x + 3 - 5x = 0$ $2x - 5x = -3$ $-3x = -3$ $x = -\frac{3}{-3}$ $x = 1$
$5x = 10$	Cuando un término, en un lado de la igualdad está **MULTIPLICANDO**, pasa al otro miembro **DIVIDIENDO**	$5x = 10$ $x = \frac{10}{5}$ $x = 2$
$\frac{2x}{3} = x - 10$	Cuando un término, en un lado de la igualdad está **DIVIDIENDO**, pasa al otro miembro **MULTIPLICANDO**	$\frac{2x}{3} = x - 10$ $2x = 3(x - 10)$

		$2x = 3x - 30$ $2x - 3x = 30$ $-x = 30$ $-x(-1) = 30(-1)$ $x = -30$

Resolución de Problemas con ecuaciones lineales

Llamamos problemas generales o literales aquellos en que los datos se representan por letras, es decir, podemos cambiar del lenguaje común al lenguaje matemático.

Para poder resolver problemas con ecuaciones, podemos seguir los siguientes pasos:

1. Representación
2. Planteo
3. Resolución
4. Comprobación

Ejemplos:

1. **Plantear y resolver la ecuación de dos números naturales consecutivos que sumen 51.**

Representación

x = valor de un número

x +1 = valor del segundo número

Planteo

$$x + (x + 1) = 51$$

Resolución

x + x +1 = 51

2x = 51 -1

2x = 50

x = $\frac{50}{2}$

x = 25 valor del primer número

25 + 1 = 26 valor del segundo número

Comprobación

x + (x + 1) = 51

25 + (25 + 1) = 51

25 + 26 = 51

2. Plantear y resolver la ecuación al siguiente enunciado:
Encontrar el número que cumple que la suma de su doble y de su triple es igual a 100.

Representación

2x= doble del número

3x = triple del número

Planteo

$2x + 3x = 100$

Resolución

$2x + 3x = 100$

$5x = 100$

$x = \frac{100}{5}$

$x = 20$

Comprobación

$2x = 2(20) = 40$

$3x = 3(20) = 60$

$40 + 60 = 100$ reemplazando valores

Sistemas de Ecuaciones 2x2

En esta semana se pretende que el estudiante aplique los conocimientos adquiridos en la semana anterior y pueda comprender y resolver de los sistemas de ecuaciones lineales, empezando con la identificación de los distintos elementos de un sistema de ecuaciones lineales (incógnitas, coeficientes, términos independientes), su escritura utilizando notación matemática y su clasificación.

Definición: Se define como un conjunto de ecuaciones que tiene varias incógnitas y tienen una solución común, la cual se desea encontrar.

Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según el número de soluciones que pueden presentar. Estas pueden ser:

- **Sistema compatible** si tiene solución, en este caso además puede distinguirse entre: o

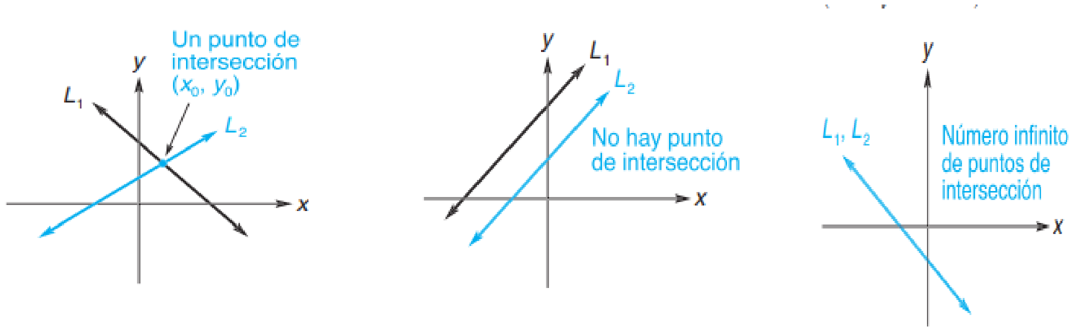
  Sistema **compatible determinado** cuando tiene una única solución.

  Sistema **compatible indeterminado** cuando admite un conjunto infinito de soluciones.

- **Sistema incompatible** si no tiene solución.

Como las ecuaciones son lineales, sus gráficas son líneas rectas; se presenta tres posibles soluciones de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2.

Una solución | No hay solución | Infinitas soluciones



Descripción: Soluciones de un sistema lineal de ecuaciones de 2x2
Fuente: Haeussler & Paul (2003)

Método de Igualación

Consiste en despejar la misma incógnita de las ecuaciones dadas y posteriormente hacer la igualación de ambas incógnitas.

Aplicamos los siguientes pasos para resolver un sistema lineal de 2x2 por el método de igualación.

1. Tomamos una de las ecuaciones y despejamos una de las incógnitas de la ecuación.
2. Despejamos la misma variable en otra ecuación del sistema.
3. Por la propiedad transitiva de la igualdad, podemos igualar las dos variables despejadas en cada ecuación.
4. La ecuación que obtuvimos en el paso anterior es de primer grado con una variable; en ella, despejamos el valor de la incógnita que tiene.

5. Por último, sustituimos el valor de la variable que encontramos en alguna de las ecuaciones que se obtuvo en el primero o segundo paso.

Ejemplo 1:

Determinar el valor de las incógnitas en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 9} \\ \boldsymbol{x - y = -1} \end{cases}$$

Paso 1: Despejar la misma incógnita "x" o "y" en cada ecuación

Ecuación 1 → $x + y = 9$ **Despejamos x restando y** → $\boxed{x = 9 - y}$

Ecuación 2 → $x - y = -1$ **Despejamos x sumando y** → $\boxed{x = -1 + y}$

Paso 2: Igualamos la incógnita despejada $x = x$

Ecuación 1 → $\boxed{9 - y} = \boxed{-1 + y}$ ← Ecuación 2

Paso 3: Despejar la incógnita

$9 - y = -1 + y$ $\quad / +y$ Pasamos el – y sumando

$9 = -1 + 2y$ $\quad /+1$ Pasamos el -1 sumando

$10 = 2y$ $\quad /\div 2$ Pasamos el 2 dividiendo

$y = 5$ $\quad$ Como $y = 5$ podemos determinar que $x = 4$

Ejemplo 2.

Determinar el valor de las incógnitas en el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{3x - 2y = 16} \\ \mathbf{5x + 4y = 12} \end{cases}$$

Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5
3x - 2y = 16 3x = 16 + 2y $\mathbf{x = \frac{16 + 2y}{3}}$	5x + 4 y = 12 5x = 12- 4y $x = \frac{12 - 4y}{5}$	x = x $\frac{16 + 2y}{3} = \frac{12 - 4y}{5}$	5(16+2y) = 3(12-4y) 80 + 10y = 36 - 12y 10y + 12y = 36 – 80 22 y = - 44 $y = \frac{-44}{22}$ **y = - 2**	$x = \frac{16 + 2y}{3}$ $x = \frac{16 + 2(\mathbf{-2})}{3}$ $x = \frac{16 - 4}{3}$ $x = \frac{12}{3}$ **x = 4**

La solución del sistema de ecuaciones es x = 4, y = -2

Comprobación:

Puede comprobar en una de las dos ecuaciones.

En la ecuación 1	**En la ecuación 2**
3x - 2y = 16 3 (4) - 2 (-2) = 16 12 + 4 = 16 16 = 16	5x + 4 y = 12 5 (4) + 4 (-2) = 12 20 - 8 = 12 12 = 12

Problemas utilizando sistemas de ecuaciones lineales 2x2

Para resolver los problemas, tenemos que seguir los siguientes pasos:

1. Identificar las incógnitas (serán x e y)
2. Obtener las dos ecuaciones
3. Resolver el sistema (por igualación)

Ejemplo 1:

Hallar dos números cuya suma sea 23 y cuya resta sea 1

Representación

x: primer número

y: segundo número

Planteo Sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 23 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Resolución

De cada ecuación despejamos la variable "x"

x + y = 23 x – y = 1

x = 23 – y x = 1 + y

Igualamos las dos variables "x"

x = x

23 - y = 1 + y

-y - y = 1 – 23

-2y = -22

$y = \frac{-22}{-2}$

El valor de "y" reemplazamos en cualquier ecuación para hallar la variable x:

x = 23 - 11

x = 12

y = 11

Comprobación

Los valores de x, y reemplazamos en una de las ecuaciones:

x + y = 23

12 + 11 = 23

23 = 23

Como obtuve una igualdad, los valores de x = 12, y = 11 son la solución del sistema de ecuaciones.

Método de Reducción o Eliminación

Definición: El método de reducción consiste en multiplicar a una de las ecuaciones por un número, de modo que, al sumar ambas ecuaciones, una de las variables sea eliminada.

La parte importante del método de eliminación es buscar en el sistema coeficientes iguales en la misma variable, por ejemplo, si se tiene el término 9x en una ecuación, se espera que se obtenga de alguna manera -9x en la otra ecuación. En caso de que la ecuación tenga todos sus coeficientes distintos, es necesario que multipliques los dos miembros de una de las ecuaciones, de manera que se generen los números iguales. Si el sistema ya cumple con la condición mencionada, entonces se realizan los siguientes pasos:

1. Se suman los miembros de las dos ecuaciones, de manera que se elimine una de las incógnitas y se forme una nueva ecuación.
2. Despejamos la ecuación que tenemos de manera que obtengamos el valor de una de las variables.
3. Se sustituye el valor de la incógnita que encontramos en el paso anterior y despejamos la variable que hace falta encontrar.

Ejemplo 1: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x + 2y = 14} \\ \boldsymbol{x \ \ - 2y = 2} \end{cases}$$

Como los coeficientes de los términos en “y” son números opuestos, podemos sumar las ecuaciones para eliminar la variable “y”

3x + 2y = 14

x - 2y = 2

4x = 16

$x = \frac{16}{4}$

x = 4

Reemplazamos el valor de “x” en cualquiera de las ecuaciones para hallar la variable “y”

X – 2y = 2

4 – 2y = 2

4 – 2 = 2y

2 = 2y

$$y = \frac{2}{2}$$

y = 1

Comprobación

Los valores de x, y reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones

3x + 2y = 14

3(4) + 2(1) = 14

12 + 2 = 14

14 = 14

Por lo tanto, la solución del sistema es x = 4, y = 1

Problemas utilizando sistemas de ecuaciones lineales 2x2

Ejemplo 3:

Las edades de dos hermanos suman 32 años y su diferencia es de dos años. ¿Cuántos años tiene cada hermano?

Representación

x: edad hermano mayor.

y: edad hermano menor.

Planteo

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Resolución

No se necesita multiplicar por ningún número ya que podemos eliminar fácilmente la variable y.

x + y = 32

$x - \cancel{y} = 2$

2x = 34

$$x = \frac{34}{2}$$

x = 17

Reemplazamos el valor de “x” en cualquiera de las ecuaciones para hallar la variable “y”

x + y = 32

17 + y = 32

y = 32 - 17

y = 15

Comprobación

Los valores de x, y reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones

x – y = 2

17 – 15 = 2

2 = 2

Por lo tanto, la edad del hermano mayor es 17 y la del hermano menor es 15

Inecuaciones

En el conjunto de los números reales R, podemos comparar sus elementos mediante una relación de orden:

<	Se lee menor que
>	Se lee mayor que
≤	Se lee menor o igual que
≥	se lee mayor o igual que

a < b	**a > b**	**a = b**	**a ≤ b**	**a ≥ b**

A la relación que usa estos signos se llama desigualdad:

3 < 5	**7 > 3**	**4 = 4**	**5 ≤ 10**	**12 ≥ -3**

Una desigualdad puede ser verdadera o falsa:

7 > 3 verdadero

5 > 8 falso

Cuando una desigualdad presenta una incógnita se denomina inecuación.

$$7 + \boldsymbol{x} \leq 3$$

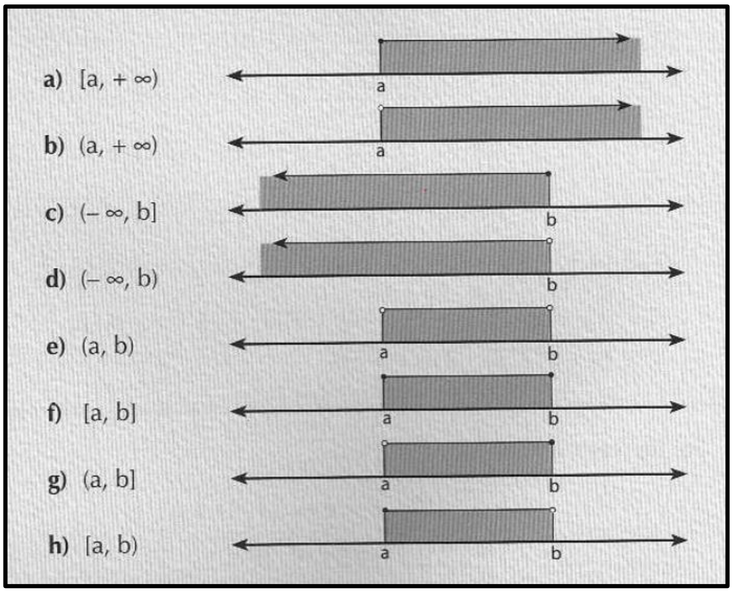
$$(\boldsymbol{x} + 1)^2 \geq 3$$

Resolver una inecuación es encontrar el **intervalo** de números reales para el cual la inecuación se transforma en una desigualdad verdadera.

Un intervalo es un subconjunto de números reales que se encuentran entre dos valores que delimitan un extremo inferior y otro superior. La simbología para representar los extremos se presenta en la siguiente tabla:

extremo	izquierdo	derecho
cerrado	**[**	**]**
abierto	**(**	**)**

Los tipos de intervalos se presentan en el siguiente gráfico.



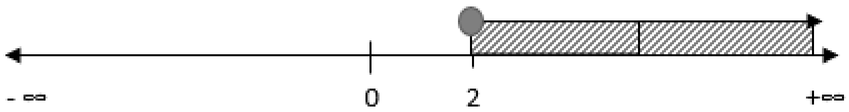
Descripción: Casos que se presentan en los gráficos de los intervalos
Fuente: Carreño & Cruz (2006)

Inecuaciones lineales

Cuando una desigualdad presenta una incógnita se denomina inecuación. Se llama incógnita de una inecuación al valor desconocido que se pretende determinar. La inecuación es lineal porque el exponente de la variable es uno. Una inecuación se resuelve igual que una ecuación considerando que no es una igualdad y que el conjunto solución puede ser infinito o estar dentro de un intervalo.

Ejemplo 1. Hallar el conjunto solución de la inecuación: 3x -3 ≥ 5 - x

ercicio	-3 ≥ 5 - x
lución	-3 ≥ 5 - x + x ≥ 5 + 3 ≥ 8 $x \geq \frac{8}{4}$ ≥ 2

lución gráfica	
lución intervalo	$+\infty)$

Ejemplo 2. Hallar el conjunto solución de la inecuación: $2x - 4 \geq 3x$

ercicio	$- 4 \geq 3x$
lución	$-3x \geq 4$ ≥ 4 **Multiplicamos por (-1) y cambiamos el sentido de la desigualdad** -4
lución gráfica	
lución intervalo	**, -4]**

Inecuaciones cuadráticas

Una inecuación cuadrática es una desigualdad que tiene la siguiente forma:

$ax^2 + bx + c \geq 0$
$ax^2 + bx + c > 0$
$ax^2 + bx + c \leq 0$
$ax^2 + bx + c < 0$

El conjunto solución se determina mediante la elaboración de la **tabla de signos** que describe los siguientes pasos:

1	**Se determina las raíces de la inecuación (factores que hacen que el resultado sea cero)**
2	Se ubican los factores de menor a mayor
3	**Los valores antes del límite se considerarán menores y se les asignará el signo -**
4	Los valores después del límite se considerarán mayores y se les asignará el signo +
5	**Se realiza el producto aplicando la ley de signos**
6	Se determina el intervalo que constituye el conjunto solución.

Ejemplo 1. Resolver la siguiente inecuación: $x^2 + x - 2 \geq 0$

<table>
<tr><th>RAÍCES-VALORES LÍMITES</th><th>TABLA DE SIGNOS</th></tr>
<tr>
<td>$x^2 + x - 2 \geq 0$
$x^2 + x - 2 = 0$
$(x + 2)(x - 1) = 0$
$x_1 + 2 = 0$; $x_2 - 1 = 0$
$x_1 = -2$; $x_2 = 1$</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>$-\infty$</th><th>-2</th><th>1</th><th>$+\infty$</th></tr>
<tr><td>$x+2$</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>$x-1$</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td><td></td></tr>
<tr><td>PRODUCTO</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td><td></td></tr>
</table>
Como la condición planteada en la inecuación es ≥ 0, entonces se considerarán los intervalos +

Por lo tanto el conjunto solución será:

$(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$
</td>
</tr>
</table>

Matrices

Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el ordenamiento de datos, así como su manejo.

Una de las aplicaciones de las matrices es como un instrumento poderoso para tratar con modelos que impliquen la solución de sistemas de ecuaciones lineales. En está unidad se consideran los aspectos prácticos de la solución de sistema de ecuaciones mediante matrices y operaciones con matrices, entre otras.

Recordemos que un sistema de $\boldsymbol{m}$ ecuaciones con $\boldsymbol{n}$ variables, se expresa por

$$a_{11}x_{11} + b_{12}y_{12} + \ldots c_{1n}c_{1n} = d_1$$

$$a_{21}x_{21} + b_{22}y_{22} + \ldots c_{2n}c_{2n} = d_2$$

$$a_{31}x_{31} + b_{32}y_{32} + \ldots c_{3n}c_{3n} = d_3$$

Donde:

El primer subíndice de los coeficientes indica el número de la ecuación, y el segundo el número de la variable.

Los coeficientes que acompañan a las incógnitas se pueden colocar en la forma:

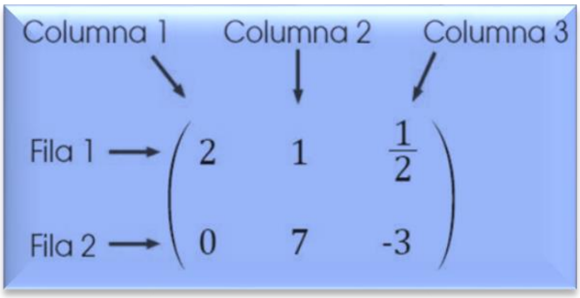
$$\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & c_{2n} \\ a_{31} & b_{31} & c_{3n} \end{pmatrix}$$

que es una tabla rectangular de $\boldsymbol{m}$ filas y $\boldsymbol{n}$ columnas. De esta manera surge la siguiente definición:

Definición de matriz

Se llama matriz a un arreglo rectangular de números dispuestos en $\boldsymbol{m}$ filas y $\boldsymbol{n}$ columnas.

Es decir, una matriz es un conjunto de números ordenado en filas y columnas, cada término es un elemento de la matriz y su dimensión está dada por el número de filas y columnas que la conforma; se acostumbra a encerrarlos entre corchetes, y también es común que se utilicen paréntesis. En la representación simbólica de matrices usaremos letras mayúsculas en negritas como **A, B, C**, etcétera.



Descripción: Matriz de orden 2x3

Fuente: Anónimo (s.f)

La dimensión de una matriz u orden, indica primero el número de filas (m), enseguida el número de columna (n), que forman a la matriz m x n, la cual se lee "m por n".

Ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Una matriz de ***segunda orden***, se define a una matriz cuadrada de dos por dos, es decir ***dos filas*** y ***dos columnas***.

Ejemplo:

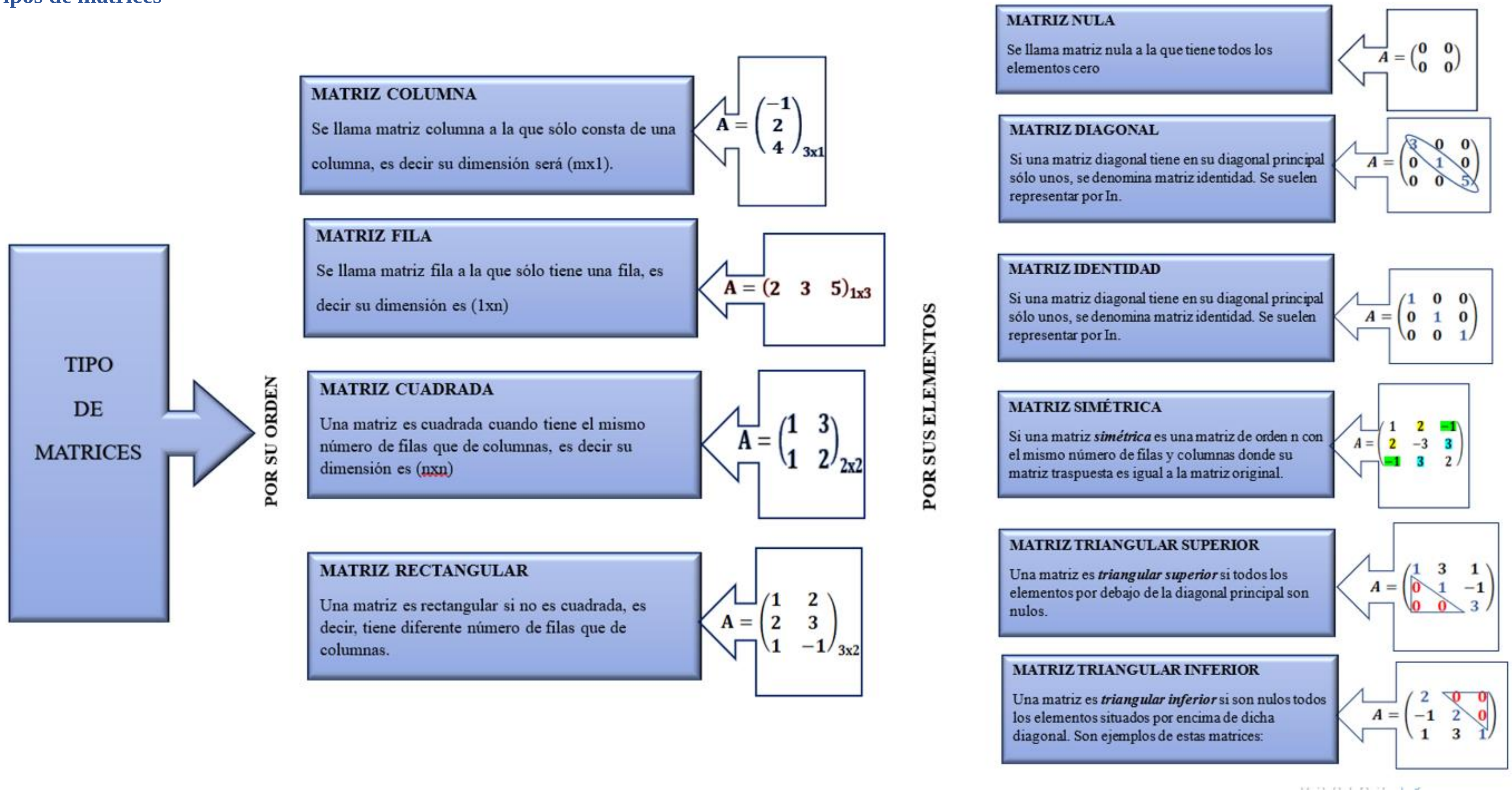
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Se define a una matriz de ***tercer orden*** a la matriz cuadrada de tres por tres, es decir ***tres filas*** y ***tres columnas***.

Ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Tipos de matrices



Matriz transpuesta A^T

Una matriz traspuesta es el resultado de reordenar la matriz original mediante el cambio de filas por columnas y las columnas por filas en una nueva matriz.

Ejemplo 1:

Obtenga la matriz transpuesta de:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

En la formación de la matriz transpuesta escribimos la primera fila como la primera columna, la segunda fila como la segunda columna y así sucesivamente.

Solución

1. Tomar en cuenta que:
   - A, es un matriz de orden 3 x 4,
   - La transpuesta A^T será una matriz de orden 4 x 3.
2. Por tanto, la matriz traspuesta de A es:

$$\boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{4x3}$$

Ejemplo 2:

Obtenga la matriz transpuesta de:

$\boldsymbol{B} = (2 \quad -5)$

La transpuesta de una matriz fila es una matriz columna:

$$\boldsymbol{B^T} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3:

De las siguientes matrices identificar de que orden son:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{m\times n}$ A, es una matriz de orden 2 x 3, es decir 2 filas y 3 columnas

$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}_{m\times n}$ B, es una matriz de orden 2 x 2, es decir 2 filas y 2 columnas

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$ C, es una matriz de orden 3 x 1, es decir 3 filas y 1 columnas

$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{m\times n}$ D, es una matriz de orden 1 x 3, es decir 1 fila y 3 columnas

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0+2 & -1 \\ 2\times 0 & -1 \end{pmatrix}_{m\times n}$$ E, es una matriz de orden 2 x 2, es decir 2 filas y 2 columnas

Encontrar la Traspuesta de las siguientes matrices:

1)

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$\boldsymbol{F^T} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

- F, es un matriz de orden 2 x 3, es decir 2 filas y 3 columna
- La transpuesta FT será una matriz de orden 3 x 2. Es decir 3 filas y 2 columnas

2)

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$\boldsymbol{G^T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

- G, es un matriz de orden 3 x 1, es decir 3 filas y 1 columna
- La transpuesta GT será una matriz de orden 1 x 3, es decir 1 final y 3 columna

Operaciones con matrices

Adición (Suma) de matrices

Pueden sumarse dos matrices A y B, si sólo si tiene las misma dimensión (mismo número de filas y columnas), al ser sometidas a la opreción de suma, da como resultado una tercer matriz C, y ésta tendrá la misma dimensión que la matriz A y B

Para sumar dos matrices deben tener el mismo orden, es decir deben tener el mismo número de filas y de columnas, se suman término a término los elemento de cada matriz.

Ejemplo 1.
Sean las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & b \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & b \end{pmatrix}$$

Encotrar A+B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & b \end{pmatrix}_{2x2} \quad ; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & b \end{pmatrix}_{2x2}$$

Las matrices A y B tienen el mismo orden se puede realizar la operación suma.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a + (-a) & a + b \\ c + (-c) & b + b \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a + b \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.
Sean las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-7} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Encontrar A+B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad ; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-7} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Como las matrices A y B tienen el mismo orden, se puede realizar la operación de suma entre ellas.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 + (-7) & \mathbf{3} + (\mathbf{-4}) \\ \mathbf{-4} + \mathbf{6} & \mathbf{-1} + \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} + \mathbf{0} & \mathbf{0} + (\mathbf{-1}) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sustracción (Resta) de matrices

Pueden restar dos matrices A y B, si sólo si, tienen las misma dimensión. Al ser sometidas a la opreción de resta, da como resultado una tercer matriz C, y ésta tendrá la misma dimensión que la matriz A y B

Para restar matrices estas deben ser del mismo orden, es decir el mismo número de filas y de columnas, y se operan término a término los elemento de cada matriz.

Ejemplo 1.

Sean las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & b \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & b \end{pmatrix}$$

Encontrar A-B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & b \end{pmatrix}_{2x2} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & b \end{pmatrix}_{2x2}$$

Como las matrices A y B tienen el mismo orden se puede realizar la operación de resta entre ellas.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a - (-a) & a - b \\ c - (-c) & b - b \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2a} & \mathbf{a - b} \\ \mathbf{2c} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.

Sean las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Encontrar: $A - B$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} ; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Como las matrices A y B tienen el mismo orden se puede realizar la operación de resta entre ellas.

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3-(-4) & 0-(-1) & -4-2 \\ -3-5 & -1-2 & 2-6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3+4 & 0+1 & -4-2 \\ -3-5 & -1-2 & 2-6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -6 \\ -8 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Producto de un escalar por una matriz

Si A es una matriz **m x n** y ***k*** es un número real (también llamado escalar), entonces con $k \cdot A$ denotamos a la matriz m x n obtenida al multiplicar cada entrada de A por k. La operación se llama multiplicación por un escalar, y $k \cdot A$ se llama múltiplo escalar de A.

Ejemplo 1.

Dada la matriz A y el escalar k.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} ; \mathrm{k} = 3$$

Encontrar: $k \cdot A$

$$\mathrm{k} \cdot \mathbf{A} = 3 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 3 & 3\times 1 & 3\times 0 \\ 3\times 1 & 3\times(-3) & 3\times(-2) \\ 3\times 0 & 3\times(-2) & 3\times 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{k} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.

Dada la matriz B y el escalar k.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} ; \mathrm{k} = -3$$

Encontrar: $k \cdot B$

$$\mathrm{k} \cdot \mathbf{B} = (-3) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0(-3) & (-2)(-3) \\ 3(-3) & 1(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$

Producto con Matrices

Para realizar el producto entre matrices se debe verificar que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda matriz, luego se realizara la suma de los productos de los elementos de las filas con los de las columnas correspondientes y se determina cada elemento de la matriz resultante.

$A_{(m\times n)}$; $B_{(n\times q)}$

Condición: Debe tener el mismo número de columnas de la primera matriz con el mismo número de filas de la segunda matriz.

3 COLUMNAS

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{n\times q}$$

3 FILAS

Ejemplo 1.

La matriz ***A*** es de orden 2 x 3 y la matriz ***B*** es de orden 3 x 2

Entonces:

- $\mathbf{2 \times 3} \qquad \mathbf{3 \times 2}$

Ejemplo 2.

Dadas las matrices A y B.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Encontrar $A \cdot B$

Procedimiento:

1. Constatar que el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

2. Proceder a realizar las multiplicaciones de los elementos de la primera fila de la matriz A, por los elementos de la primera columna de la matriz B.

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = (1 \times 2 \quad 0 \times (-1) \quad 4 \times 0)$$

3. Se sigue realizando las multiplicaciones de los elementos de la primera fila de la matriz A por los elementos de la segunda columna de la matriz B

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = (-1 \times 2 \quad 0 \times (-1) \quad 4 \times 0 \qquad -1 \times (-3) \quad 0 \times 2 \quad 4 \times 1)$$

4. Luego se multiplica los elementos de la segunda fila de la matriz A por los elementos de la primera columna de la matriz B

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -1 \times 2 + 0 \times (-1) + 4 \times 0 & -1 \times (-3) + 0 \times 2 + 4 \times 1 \\ \mathbf{2 \times 2 + 3 \times (-1) + (-2) \times 0} & \end{pmatrix}$$

5. Seguimos realizando las multiplicaciones de los elementos de la segunda fila de la matriz A por los elementos de la segunda columna de la matriz B

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Realizamos las operaciones:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -1 \times 2 + 0 \times (-1) + 4 \times 0 & 1 \times (-3) + 0 \times 2 + 4 \times 1 \\ 2 \times 2 + 3 \times (-1) + (-2) \times 0 & 2 \times (-3) + 3 \times 2 + (-2) \times 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -2 + 0 + 0 & -3 + 2 + 4 \\ 4 + (-3) + 0 & -6 + 6 + (-2) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Obteniendo una nueva matriz de 2 x 2

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Ejemplo 3.

Dadas las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontrar:

a) C x B

Solución

a) **Encontrar** C x B

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3};\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

1. Identificar el orden

$$2\times 3 \quad 3\times 3$$

2. Se procede a multiplicar cada fila de la primera matriz por cada columna de la segunda matriz.

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} (2\times 5)+(-1\times 3)+(4\times 1) & (2\times 1)+(-1\times 0)+(4\times 2) & (2\times 4)+(-1\times 6)+(4\times 1) \\ (-1\times 5)+(3\times 3)+(0\times 1) & (-1\times 1)+(3\times 0)+(0\times 2) & (-1\times 4)+(3\times 6)+(0\times 1) \end{pmatrix}$$

3. Obtener una matriz de 2 x 3

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 10-3+4 & 2-0+8 & 8-6+4 \\ -5+9+0 & -1+0+0 & -4+18+0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 10 \\ 4 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

Determinantes

Un determinante es una magnitud escalar, es decir, un número asignado a una matriz, y tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Definición:

Un determinante se denota por **|A| o det(A)** el de segundo orden es igual al producto de los términos de la diagonal principal menos el producto de los términos de la diagonal secundaria.

Para calcular determinantes de segundo y tercer orden el método más simple es el de multiplicación diagonal, mejor conocido como Regla de Sarrus. Esta regla establece que para una matriz de segundo orden $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 2}$, el determinante se calcula de la siguiente manera:

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a)(d)-(c)(b)$$

Para calcular un determinante de una matriz de tercer orden se debe considerar que, el denominador de las incógnitas es igual al producto de los elementos de la diagonal principal de A, menos el producto de los elementos de la segunda diagonal. Este número se llama determinante de la matriz.

$$\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Además, nos permite, encontrar el determinante del sistema Δs, y así obtener una única solución del sistema compatible. Para poder encontrar los valores de las variables x, y, z: debemos encontrar los determinantes de x (Δx), determinante de y (Δy) y el determinante de z (Δy).

$x = \frac{\Delta x}{\Delta s}$	$y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$	$z = \frac{\Delta z}{\Delta s}$

Regla de Sarrus

La regla de Sarrus es un método que permite calcular rápidamente el determinante de una matriz cuadrada con dimensión de 3×3 o mayor.

En el sistema de ecuaciones, aplicando Regla de Sarrus se puede repetir las dos primeras filas hacia abajo, o las dos primeras columnas hacia la derecha, obtenido una matriz.

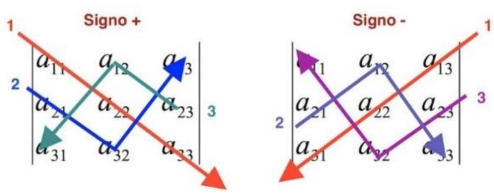
Regla Sarrus fila hacia abajo

$$\Delta s = \begin{vmatrix} x_{11} & y_{12} & z_{13} \\ x_{21} & y_{22} & z_{23} \\ x_{31} & y_{32} & z_{33} \\ x_{11} & y_{12} & z_{13} \\ x_{21} & y_{22} & z_{23} \end{vmatrix}$$

Regla Sarrus columna hacia derecha

$$\Delta s = \begin{vmatrix} x_{11} & y_{12} & z_{13} & x_{11} & y_{12} \\ x_{21} & y_{22} & z_{23} & x_{21} & y_{22} \\ x_{31} & y_{32} & z_{33} & x_{31} & y_{32} \end{vmatrix}$$

En otras palabras, la Regla de Sarrus consiste en dibujar dos conjuntos de dos triángulos opuestos mediante los elementos de la matriz. El primer conjunto serán 2 triángulos que cruzarán la diagonal principal y el segundo conjunto serán 2 triángulos que cruzarán la diagonal secundaria.



Descripción: Regla de Sarrus
Fuente: Anónimo (s.f.)

Ejercicio

Realice el sistema de ecuaciones de 3x3 mediante el Método de Cramer-Sarrus

$$x + y + z = 11$$
$$2x - y + z = 5$$
$$3x + 2y + z = 24$$

Obtener los coeficientes de todo el sistema de ecuaciones, aplicando Regla de Sarrus es decir se puede repetir las dos primeras filas hacia abajo, o las dos primeras columnas hacia la derecha, se obtiene la siguiente matriz.

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Diagonales principales $\rightarrow$
Diagonales secundarias $\rightarrow$

Procedimiento:

Se obtiene el determinante del sistema, multiplicando las diagonales principales y restando el producto de las diagonales secundarias.

$$= (-1 + 4 + 3) - (-3 + 2 + 2)$$
$$= 6 - 1$$
$$= 5$$

Aplicando Regla de Sarrus para obtener el determinante de x, y, z, escribiendo las dos primeras columnas hacia la derecha:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{Ti} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} & & \end{array} \\ \Delta x = & \begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 & 11 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 5 & -1 \\ 24 & 2 & 1 & 24 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (\mathbf{-11 + 24 + 10}) - (\mathbf{-24 + 22 + 5})$$
$$= \mathbf{23} - \mathbf{3}$$
$$= 20$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{Ti} & \boldsymbol{z} & & \end{array} \\ \Delta y = & \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 24 & 1 & 3 & 24 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (5 + 33 + 48) - (15 + 24 + 22)$$
$$= 86 - 61$$
$$= 25$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{Ti} & & \end{array} \\ \Delta z = & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 24 & 3 & 2 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= (-24 + 15 + 44) - (-33 + 10 + 48)$$
$$= 35 - 25$$
$$= 10$$

Una vez, que se ha obtenido DETERMINANTE de: x, y, z $(\Delta x, \Delta y\ y\ \Delta z)$, así como el del sistema (Δs), debemos encontrar los valores de x, y, z.

$\Delta s = 5$

$\Delta x = 20$
$\Delta y = 25$
$\Delta z = 10$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta s}$	$y = \frac{\Delta y}{\Delta s}$	$z = \frac{\Delta z}{\Delta s}$
$x = \frac{20}{5}$	$y = \frac{25}{5}$	$z = \frac{10}{5}$
$x = 4$	$y = 5$	$z = 2$

Comprobación

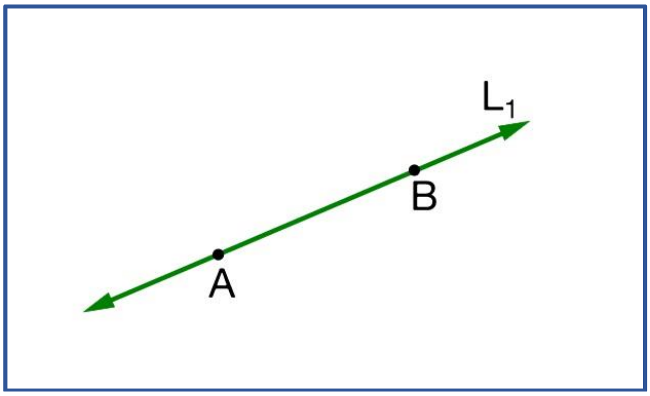
Sustituyendo los valores de las variables x, y, z

$x + y + z = 11$	$2x - y + z = 5$	$3x + 2y + z = 24$
$4 + 5 + 2 = 11$	$2(4) - 5 + 2 = 5$	$3(4) + 2(5) + 2 = 24$
$11 = 11$	$8 - 5 + 2 = 5$	$12 + 10 + 2 = 24$
	$5 = 5$	$24 = 24$

La recta

La recta es un elemento unidimensional en geometría que se define como una serie infinita de puntos que mantiene una sola dirección, es decir, no presenta curvas.

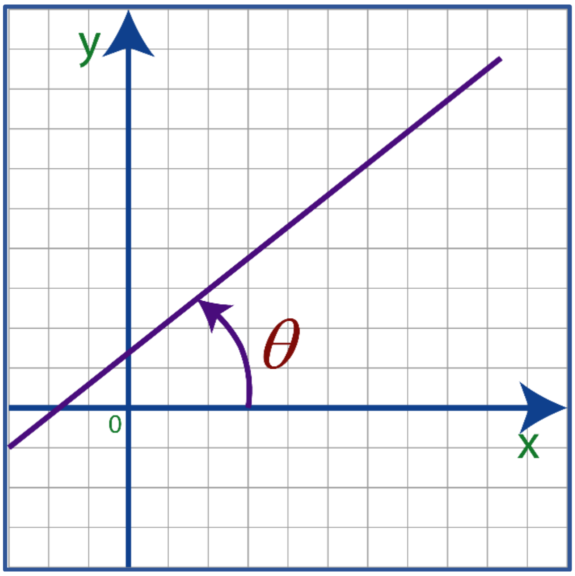
Para indicar los puntos de una recta, debemos utilizar letras mayúsculas.



Descripción: recta L1 con dos puntos.
Fuente: caracteristicas (2020)

Inclinación de una recta

Es el ángulo que una recta forma con el eje “x” positivo, este ángulo se mide a partir del eje “x” y girando en sentido opuesto a las manecillas del reloj. Se representa con la letra θ.



Descripción: inclinación de la recta.
Fuente: matemáticas video (2020).

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta es la tangente del ángulo de inclinación que tiene una recta y se representa con la letra *m*.

$$m = \tan\theta$$

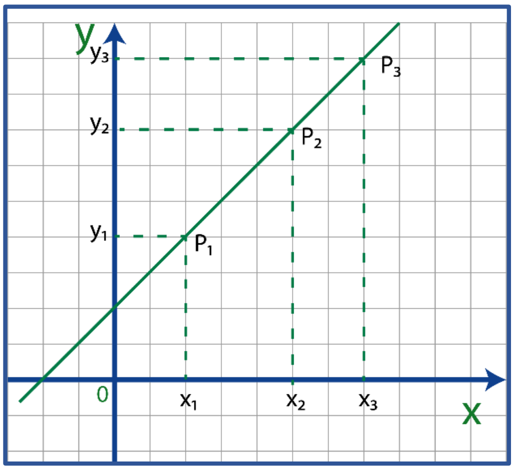
Pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Si se conocen las coordenadas de dos puntos sobre una recta, entonces la pendiente de la recta se puede encontrar a partir de las coordenadas dadas.

Definición

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos diferentes sobre una recta no vertical. La pendiente de la recta es:

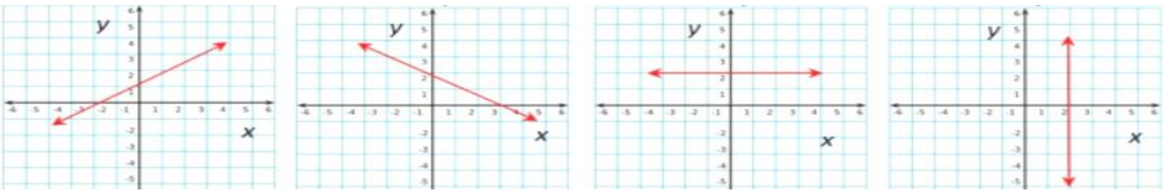
$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



Descripción: Recta con tres puntos.
Fuente: matemáticas video (2020).

Tipos de pendiente

POSITIVA	NEGATIVA	CERO	INDEFINIDA
m > 0 **Recta que sube de izquierda a derecha.**	**m < 0** **Recta que desciende de izquierda a derecha.**	**m = 0** **Recta horizontal.**	**m = ∞** **Recta vertical.**



Ejemplo 1. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (4, 1) y (7, 10).

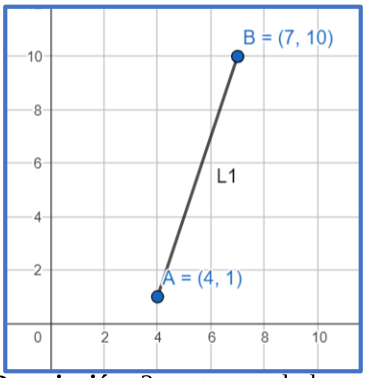
Solución.

Aplicamos la fórmula de la pendiente de una recta que pasa por dos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y remplazamos los valores de los puntos

$$m = \frac{10 - 1}{7 - 4} = \frac{9}{3} = \mathbf{3}$$



Descripción: 2 puntos en el plano.
Fuente: Tituaña, M. (2023).

Ecuación explícita de la recta

La ecuación explícita de la recta es la más importante de todas sus representaciones porque nos da mucha información de la recta.

La forma universal de esta sería la siguiente:

$$y = mx + b$$

Siendo:

m la pendiente de la recta.

b la ordenada en el origen o corte con el eje y.

Ecuación general de la recta

Es necesario recurrir a una ecuación que permita abarcar de forma general, todas las rectas en el plano cartesiano. Esto lo haremos definiendo la recta no como una ecuación explícita, sino como una ecuación implícita. Es decir, no como una variable (***y***) que depende explícitamente de otra variable (***x***), sino como una relación entre ambas variables.

Entonces, si A, B y C son números reales tal que A y B son diferentes a cero, definimos **la ecuación general la recta** como una relación entre dos variables ***x*** e ***y*** a través de una igualdad de la siguiente forma:

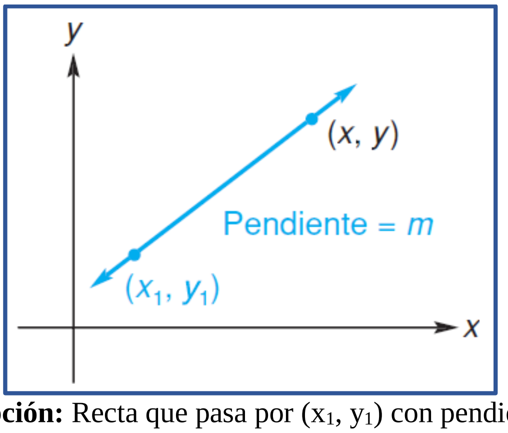
$$Ax + By + C = 0$$

Ecuación de la recta conociendo un punto y la pendiente

Si conocemos un punto y la pendiente de una recta, podemos encontrar una ecuación cuya gráfica sea esa recta. Suponga que la recta L tiene pendiente *m* y pasa a través del punto (x_1, y_1). Si (x, y) es cualquier otro punto sobre L, podemos encontrar una relación algebraica entre x y y.

$$\mathbf{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

la ecuación anterior se denomina "**ecuación de la recta punto – pendiente**" que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m.



Descripción: Recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m.
Fuente: Haeussler & Richard (2003).

Ejemplo 2. Encontrar la ecuación general de la recta que tiene pendiente 2 y pasa por el punto (1, -3).

Datos.

m = 2

$(x_1, y_1) = (1, -3)$

Solución.

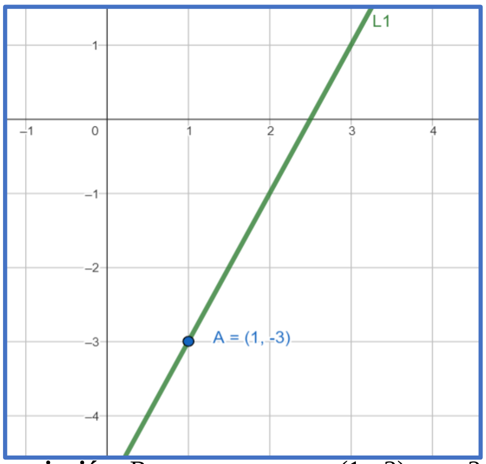
$y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$y - (-3) = 2\,(x - 1)$

$y + 3 = 2x - 2$

$2x - y - 2 - 3 = 0$

$\mathbf{2x - y - 5 = 0}$



Descripción: Recta que pasa por (1, -3) y m=2.
Fuente: Tituaña, M. (2023).

Ecuación de la recta conociendo dos puntos

Si conocemos dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de una recta, podemos encontrar una ecuación cuya gráfica sea esa recta. Primero determinamos la pendiente de la recta a partir de los puntos dados. Después sustituimos la pendiente y uno de los puntos en la forma punto – pendiente.

Ejemplo 3. Determinar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos (3, 1) y (–1, –1).

Datos

$(x_1, y_1) = (3, 1)$

$(x_2, y_2) = (-1, -1)$

Solución.

Primero hallamos la pendiente con la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-1-1}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

luego utilizamos la fórmula punto – pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

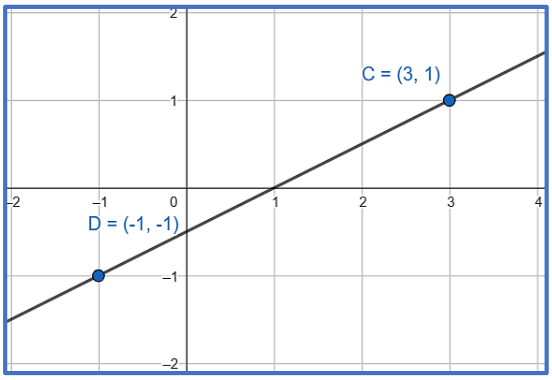
$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$2(y - 1) = (x - 3)$$

$$2y - 2 = x - 3$$

$$2y = x - 3 + 2$$

$$2y = x - 1$$



$$y = \frac{x-1}{2}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$$

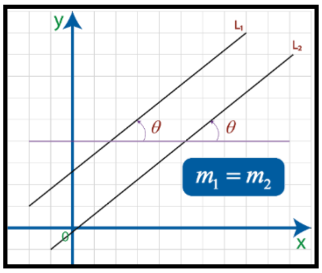
Rectas paralelas y perpendiculares

Rectas paralelas

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

$$\mathbf{m_1 = m_2}$$

En el plano, dos rectas son paralelas cuando no se cortan. Es decir, cuando no tienen puntos en común.



Descripción: Rectas paralelas.
Fuente: matemáticas video (2020).

Rectas perpendiculares

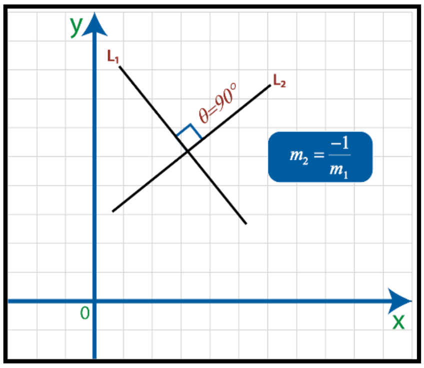
Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares entre sí, sí y sólo si,

$$\mathbf{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$$

o que es lo mismo

$$\mathbf{m_1 \times m_2 = -1}$$

Dos rectas perpendiculares entre sí forman un ángulo recto (90°).



Descripción: Rectas perpendiculares.

Fuente: matemáticas video (2020).

Recordatorio:

Para determinar la pendiente en la ecuación explícita:

$$y = mx + b$$

Para determinar la pendiente en la ecuación general:

$$Ax + By + C = 0$$

$$m = -\frac{A}{B}$$

Ejemplo 1. Determine si las rectas son paralelas o perpendiculares.

L_1: y = 5x + 2

L_2: -5x + y - 3 = 0

Solución.

La ecuación L_1 está en forma explícita y = mx + b; donde "m" es la pendiente, por lo tanto, su pendiente será

$$m_1 = 5$$

La ecuación L_2 está en forma general $Ax + By + C = 0$; donde la pendiente viene dada por

$$-5x + y - 3 = 0$$

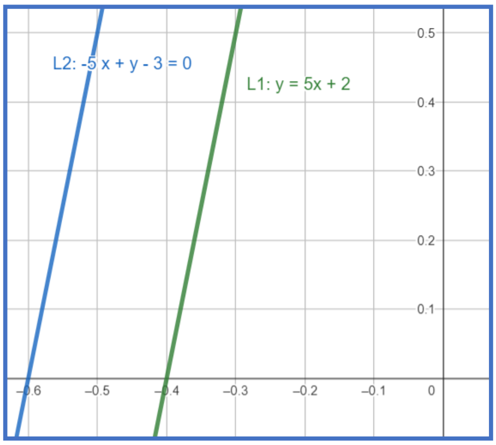
$$m = -\frac{A}{B}$$

A = -5

B = 1

$$m_2 = -\frac{-5}{1}$$

$$m_2 = 5$$



Descripción: Rectas paralelas.
Fuente: Tituaña, M. (2023).

por lo tanto, su pendiente será

$$m_2 = -\frac{-5}{1} = 5$$

Ambas pendientes tienen el mismo valor $m_1 = m_2 = 5$; por lo tanto, **las rectas son paralelas**.

Problemas de rectas paralelas y perpendiculares

Se analizan los problemas con ayuda del soporte teórico que se ha visto sobre rectas paralelas y perpendiculares para responder a los mismos.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3,1)$ y es paralela a la recta $y = 2x - 3$.

Solución:

Datos:

L_1: $y = 2x - 3$

P1$(-3,1)$

De la recta L_1 podemos determinar m_1:

$y = 2x - 3 \rightarrow y = mx + b$

Por lo tanto, $m_1 = 2$

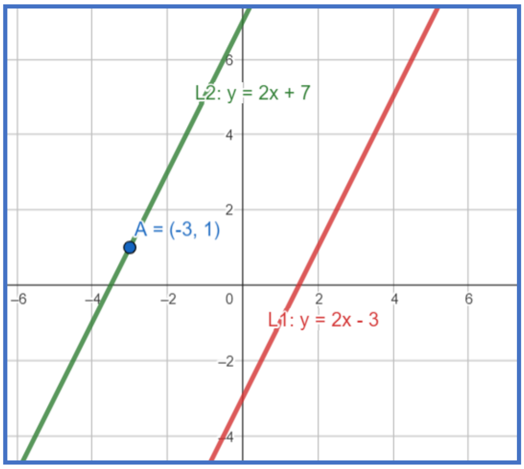
Como las rectas son paralelas se cumple que:

$m_1 = m_2$

Ahora se tiene:

$m_2 = 2$

$P_1(-3,1)$



Descripción: Rectas paralelas.
Fuente: Tituaña, M. (2023).

Ya se puede escribir la ecuación de la recta, usando:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 2(x - (-3))$

$y - 1 = 2(x + 3)$

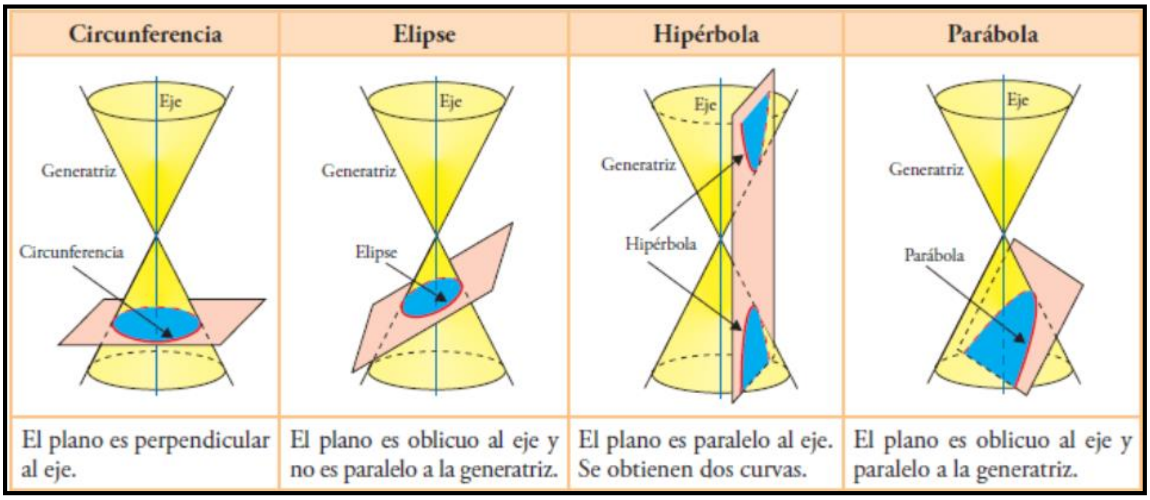
$y - 1 = 2x + 6$

$y = 2x + 6 + 1$

$\boldsymbol{y = 2x + 7}$

Cónicas

Una cónica es la curva que se obtiene como intersección de una superficie cónica de revolución y un plano.



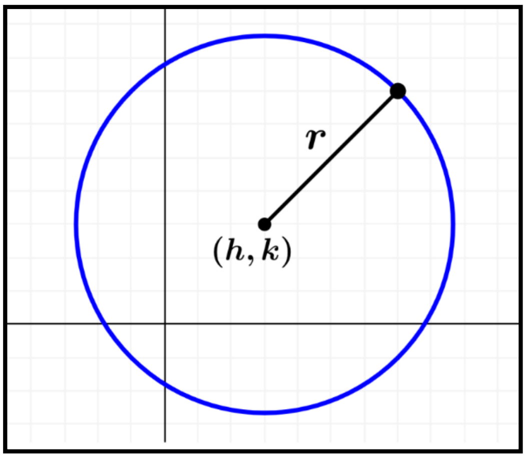
Descripción: Cónicas generadas al cortar con un plano un doble cono.
Fuente: Fernández (2014).

Si se corta un doble cono por diversos planos, según su inclinación, las intersecciones que se producen dan lugar a curvas bien definidas: las cónicas. A continuación, se presentan las 4 posibilidades que se pueden presentar cuando el plano no pasa por el vértice.

La familia de curvas obtenidas tiene una gran importancia en campos como la arquitectura, la astronomía o la ingeniería: las cónicas. En este curso estudiaremos únicamente dos de las cuatro cónicas, **circunferencia y parábola**.

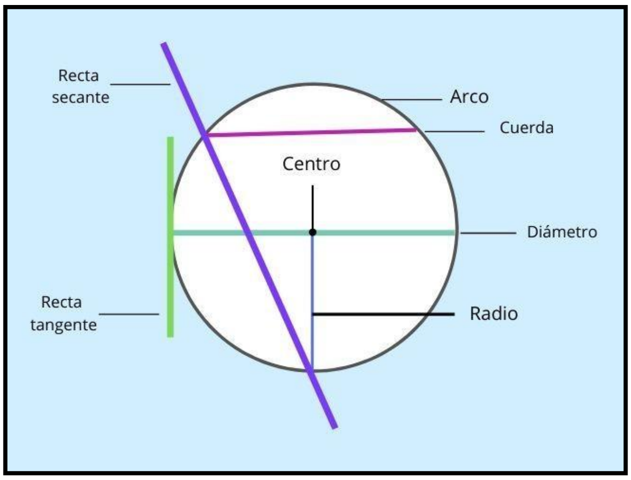
Circunferencia

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo llamado centro (C). La distancia fija se llama radio de la circunferencia (r).



Descripción: Circunferencia con centro (h, k) y radio r.
Fuente: neurochispas.com (s.f.).

La circunferencia es el perímetro del círculo, que posee los siguientes elementos:



Descripción: Elementos de la circunferencia.
Fuente: diferenciador.com (s.f.).

- **Centro:** El punto interior equidistante a todos los puntos de la circunferencia.
- **Radio:** Segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella. El radio se denota con la letra «r» o bien con sus puntos extremos, su medida es constante.
- **Cuerda:** Segmento que une dos puntos de la circunferencia de manera interna.
- **Diámetro:** Es la cuerda de mayor medida que pasa por el centro de la circunferencia. Lo denotamos mediante «d» y es el doble del radio (2r).
- **Tangente:** Es la recta que interseca a solo un punto de la circunferencia.
- **Secante:** Es la recta que corta a la circunferencia, intersecando dos puntos de ella.

Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen

Según la definición, se tiene que cualquier punto P (x, y) que pertenezca a la circunferencia se encuentra a una distancia CP desde el centro, y a este segmento se le conoce como radio.

Aplicando la fórmula de distancia entre los puntos desde un punto $P\ (x, y)$ al centro $C\ (h, k)$:

$$d^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

La distancia d es igual al radio (d = r), por lo tanto

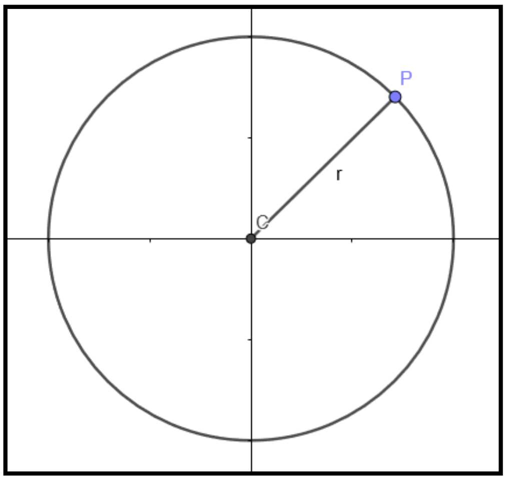
$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

Remplazamos las coordenadas del centro C (0,0)

$$r^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2$$

$$\boldsymbol{r^2 = x^2 + y^2}$$

La ecuación anterior se denomina ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen.



Descripción: Circunferencia con centro en el origen (0,0) y radio r.
Elaborado por: Vivanco, S (2022).

Ecuación canónica de la circunferencia con centro en $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$

Iniciamos con el mismo procedimiento ejecutado anteriormente para obtener la ecuación canónica con C (0, 0), pero en este caso, vamos a sustituir por el centro de coordenadas C (h, k) pues este se encuentra fuera del origen. Empleamos la fórmula de distancia entre dos puntos desde un punto P (x, y) al centro C (h, k).

$$d^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

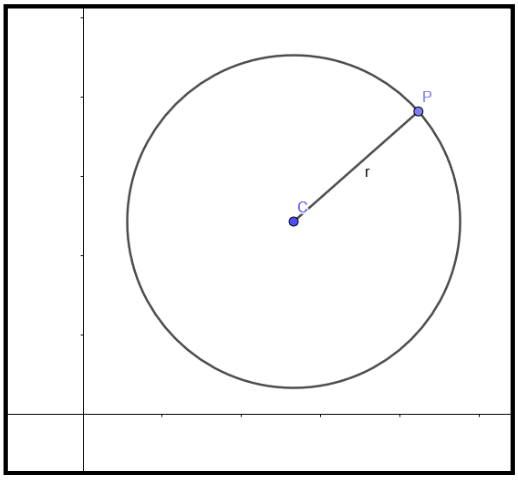
La distancia d es igual al radio (d=r), por lo tanto

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

Remplazamos las coordenadas del centro C (h, k)

$$\boldsymbol{r^2} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})^2$$

La ecuación anterior se denomina ecuación canónica de la circunferencia con centro en $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$.



Descripción: Circunferencia con centro en (h, k) y radio r.
Elaborado por: Vivanco, S (2022).

Ecuación general de la circunferencia

Recordatorio:

Binomio elevado al cuadrado

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Si desarrollamos la ecuación canónica de la circunferencia, resolviendo el producto notable binomio al cuadrado (en los dos paréntesis), tenemos:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	**Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k).**
$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$	Resolviendo el binomio al cuadrado
$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + y^2 - r^2 = 0$	Ordenando los términos convenientemente
$A = -2h; \quad B = -2k; \quad C = h^2 + y^2 - r^2$	Remplazando las constantes A, B y C
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	Ecuación general de la circunferencia

Obtención de la ecuación canónica de la circunferencia a partir de la ecuación general

Para llegar a la ecuación canónica a partir de la ecuación general, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Debemos identificar las variables elevadas al cuadrado, ya que vamos a escribir todos los términos que contengan dichas variables a la izquierda de la igualdad y los demás a la derecha.
2. Hecho esto se puede completar un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo para cada variable, para ello se tiene que dividir el término lineal y este resultado elevarlo al cuadrado y el número que resulte se agregará a ambos lados de la ecuación.
3. Teniendo los trinomios cuadrados perfectos al lado izquierdo se puede factorizar para convertirlo en un binomio al cuadrado, mientras que en el lado derecho de la igualdad se deben sumar los números.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen y radio igual a 4.

Solución.

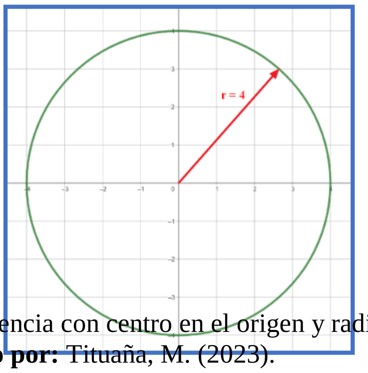
Partimos de la ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen

$r^2 = x^2 + y^2$

remplazamos los datos

$(4)^2 = x^2 + y^2$

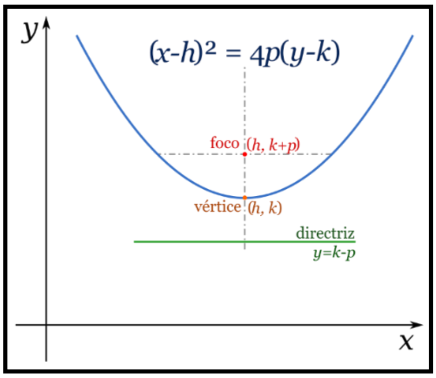
$\mathbf{16 = x^2 + y^2}$



Descripción: Circunferencia con centro en el origen y radio 4.
Elaborado por: Tituaña, M. (2023).

Parábola

Una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que tienen una distancia igual a una recta fija denominada directriz, y a un punto fijo llamado foco.

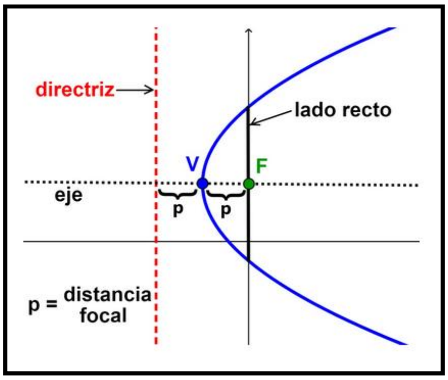


Descripción: Parábola vertical, vértice (h, k).
Fuente: wikipedia.org (s.f.).

Elementos de la parábola

- **Eje focal:** También nombrado eje de simetría es la recta que pasa por el foco e interseca perpendicularmente a la directriz.
- **Directriz:** Recta cuya distancia a cualquier punto de la parábola es igual a la distancia de la misma al punto fijo llamado foco.
- **Vértice:** Es el punto V en el que se une la parábola con el eje focal.
- **Foco:** Es el punto fijo F que se halla sobre el eje de simetría.

- **Lado recto:** Es la cuerda paralela a la directriz que pasa por el foco, su distancia es de 4p.
- **Parámetro:** Designado comúnmente con la letra p, se refiere a la distancia que existe entre el vértice y el foco, la cual es igual a la distancia entre el vértice y la directriz.

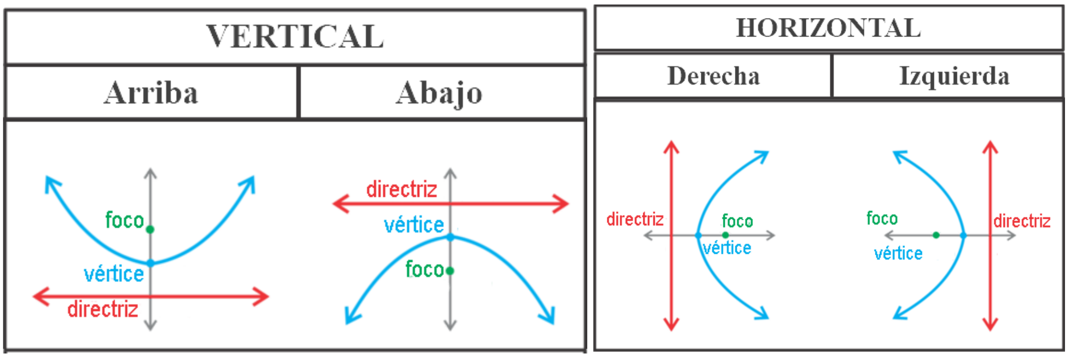


Descripción: Elementos de la parábola.
Fuente: diferenciador.com (s.f.).

Tipos de parábolas

Podemos clasificar a las parábolas dependiendo en su orientación. Podemos tener parábolas orientadas horizontal y verticalmente. Además, las parábolas pueden abrirse hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba y hacia abajo, es decir podemos tener los siguientes tipos de parábolas:

- ✓ Parábola horizontal que se abre hacia la derecha
- ✓ Parábola horizontal que se abre hacia la izquierda
- ✓ Parábola vertical que se abre hacia arriba
- ✓ Parábola vertical que se abre hacia abajo

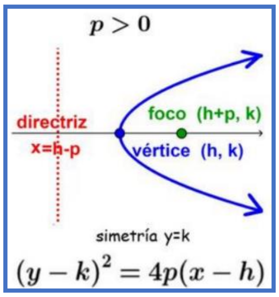


Descripción: Tipos de parábolas.
Fuente: Tituaña, M. (2023).

Ecuación canónica de la parábola

Parábola horizontal que se abre hacia la derecha

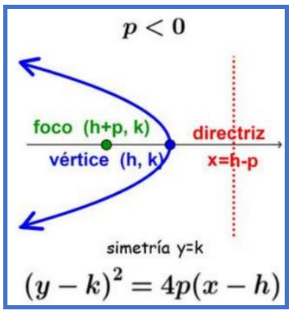
Esta parábola es obtenida cuando la directriz es vertical y el parámetro p es positivo.



Descripción: Parábola horizontal que se abre hacia la derecha
Fuente: Huera, J (2022).

Parábola horizontal que se abre hacia la izquierda

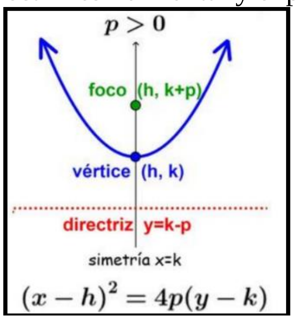
Esta parábola es obtenida cuando la directriz es vertical y el parámetro p es negativo.



Descripción: Parábola horizontal que se abre hacia la izquierda
Fuente: Huera, J (2022).

Parábola vertical que se abre hacia arriba

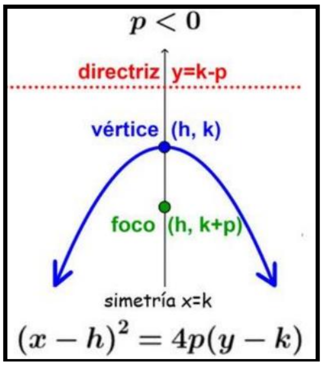
Esta parábola es obtenida cuando la directriz es horizontal y el parámetro p es positivo.



Descripción: Parábola vertical que se abre hacia arriba
Fuente: Huera, J (2022).

Parábola vertical que se abre hacia abajo

Esta parábola es obtenida cuando la directriz es horizontal y el parámetro p es negativo.



Descripción: Parábola vertical que se abre hacia abajo
Fuente: Huera, J (2022)

Ecuación general de la parábola

Obtención de la ecuación general de la parábola a partir de la ecuación canónica.

Recordatorio:

Binomio elevado al cuadrado

$$(x \pm h)^2 = x^2 \pm 2xh + h^2$$

Para llegar a dicha expresión o forma general, es necesario desarrollar algebraicamente la forma canónica de la ecuación, siguiendo el siguiente proceso:

1. Desarrollar el binomio al cuadrado del lado izquierdo y realizar la propiedad distributiva al lado derecho de la ecuación.
2. Hecho esto se iguala a cero toda la ecuación y se operan términos semejantes.

Tomando como ejemplo la forma:

$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^{\mathbf{2}} = \mathbf{4}\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})$

Desarrollando resulta:

$$\boldsymbol{Ax^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Por ejemplo, desarrollar la ecuación canónica de la parábola: $(x+3)^2 = 8(y-1)$

$x^2 + 6x + 9 = 8y - 8$

$x^2 + 6x + 9 - 8y + 8 = 0$

$\boldsymbol{x^2 + 6x - 8y + 17 = 0}$, que es la ecuación de una parábola vertical en su forma general.

Análogamente, para una parábola de orientación horizontal, la ecuación en su forma general será:

$$\boldsymbol{Cy^2 + Ey + Dx + F = 0}$$

Por ejemplo, desarrollar la ecuación canónica de la parábola: $(y-2)^2 = 4(x+2)$

$y^2 - 4y + 4 = 4x + 8$

$y^2 - 4y + 4 - 4x - 8 = 0$

$\boldsymbol{y^2 - 4y - 4x - 4 = 0}$, que es la ecuación de una parábola horizontal en su forma general.

Obtención de la ecuación canónica de la parábola a partir de la ecuación general

Para llegar a la ecuación canónica a partir de la ecuación general, se sigue el siguiente procedimiento:

3. Debemos identificar la variable que está elevada al cuadrado, ya que vamos a escribir todos los términos que contengan dicha variable a la izquierda de la igualdad y los demás a la derecha.
4. Hecho esto se puede completar un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo, para ello se tiene que dividir el término lineal y este resultado elevarlo al cuadrado y el número que resulte se agregará a ambos lados de la ecuación.
5. Teniendo el trinomio cuadrado perfecto al lado izquierdo se puede factorizar para convertirlo en un binomio al cuadrado, mientras que en el lado derecho de la igualdad se debe sacar factor común.

Ejercicio 1. Hallar todos los elementos de la parábola cuya ecuación es:

$(y - 4)^2 = 8\,(x + 2)$

Realice también la gráfica de la parábola utilizando cualquier software matemático o graficadora.

Solución.
Comparamos con la ecuación

$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$

Tenemos entonces:

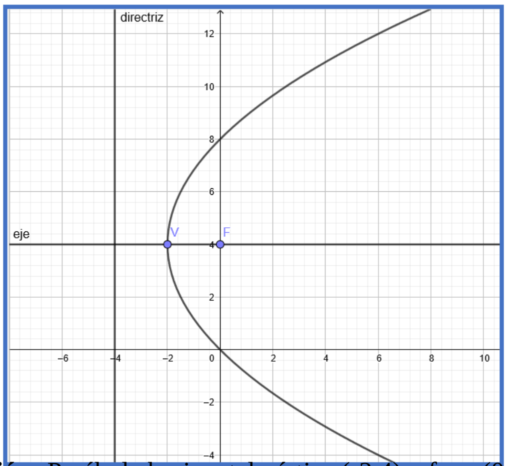
$4p = 8;\ p = 2$

Vértice (h, k) = **(-2, 4)**

Foco (h + p, k) = (-2 + 2, 4) = **(0, 4)**

Directriz: x = h – p; x = – 2 – 2; **x = – 4**

Eje: y = k; **y = 4**



Descripción: Parábola horizontal vértice (-2,4) y foco (0,4).
Elaborado por: Vivanco, S (2022).

Medidas de Tendencia Central para Datos no Agrupados

Las medidas de centralización son parámetros estadísticos que marcan, bajo distintos criterios, los valores en torno a los cuales se disponen los datos de una distribución. También se llaman medidas de tendencia central, pues alrededor de ellas se disponen los elementos de las distribuciones. Las más importantes son la media, la mediana y la moda.

Media aritmética ($\bar{X}$)

La media aritmética, promedio o, simplemente, media, de los valores x_1, x_2,…, x_n, se designa por ($\bar{X}$) y se obtiene de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Ejemplo. Las edades de 7 niños son 3, 5, 6, 8, 9, 9 y 9. Hallar la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{3+5+6+8+9+9+9}{7} = \frac{49}{7} = 7$$

Mediana (Me)

La mediana Me, La mediana es el número que ocupa el lugar central, es decir, es el número que está en medio de los datos ordenados de mayor a menor o de menor a mayor. Se presentan dos casos:

- **a) Si el número de términos de la distribución es impar**

La mediana es el valor que ocupa el lugar central, cuando los datos están ordenados de menor a mayor.

Ejemplo 1. Las edades de 7 niños son 3, 5, 6, 8, 9, 9 y 9. Hallar la mediana

Fuente: https://www.portaleducativo.net/octavo-basico/790/Media-moda-mediana-rango

En este ejemplo los datos están ordenados y se observa que la edad del niño de 8 años ocupa la parte central del conjunto de datos: **Me = 8**
Ejemplo 2. En la distribución de edades: 6, 7, 9, 6, 4, 13, 11.
Se ordenan los datos de menor a mayor: 4, 6, 6, 7, 9, 11, 13.
Luego la mediana es **Me = 7**, lugar central del conjunto de datos

- **b) Si el número de términos de la distribución es par**

La mediana es el promedio de los dos datos centrales, cuando los datos están ordenados de menor a mayor.

Ejemplo 1. Las edades de 8 niños son 3, 5, 7, 8, 9, 9, 9 y 10. Hallar la mediana

Fuente: https://www.portaleducativo.net/octavo-basico/790/Media-moda-mediana-rango

La mediana es el promedio de los valores centrales 7 y 9, es decir $\frac{7+9}{2} = \frac{16}{2} = 8$
Me = 8

Ejemplo 2. En la distribución de edades: 8, 4, 13, 6, 11, 6, 7, 9.
Se ordenan los datos de menor a mayor: 4, 6, 6, 7, 8, 9, 11, 13.
Luego la mediana es el promedio de los valores centrales 7 y 8, es decir $\frac{7+8}{2}$;
Me = 7,5.

Moda (Mo)

La moda, Mo, de una distribución estadística es el valor que más se repite, entonces no es una operación matemática. Una distribución puede tener más de una moda o no tener ninguna.

Fuente: https://www.portaleducativo.net/octavo-basico/790/Media-moda-mediana-rango

Ejemplo. En la imagen se observa la distribución 3, 5, 6, 8, 9, 9, 9, la moda es **Mo = 9**

Tabla de frecuencia para datos agrupados

Los cálculos estadísticos cuando el grupo de datos que se desea analizar son muy alto, pueden generar un nivel de error considerable, por lo que es conveniente una agrupación de datos en un cuadro o tabla de distribución y agrupación de datos.
En este sentido, el Ministerio de Educación ME (2018) expresa que “la estadística es la parte de las matemáticas que se ocupa de recoger, organizar y analizar grandes cantidades de datos para estudiar las características o el comportamiento de un colectivo.” (p. 206). lo que permite el análisis de datos mediante una organización y agrupación utilizando tablas de frecuencias.

Tabulación de datos estadísticos

La tabulación de datos es el proceso mediante el cual se toman los diferentes valores o atributos de la variable y se ubican en una columna, según el criterio de ordenación definido por el investigador, y al frente de cada valor o atributo se coloca la frecuencia.

Cuando se trata de variables cualitativas, para la tabulación de datos se recomienda seguir un patrón con orden cronológico, alfabético o con nivel jerárquico y, posteriormente, se realiza el conteo; por ejemplo, si el interés es conocer el nivel de escolaridad de un grupo de personas, se ordena de la siguiente manera (ver tabla 1):

Tabla 1. Ordenación de datos para la variable cualitativa

Nivel	N° de Personas
Básica	45
Básica Superior	32
Bachillerato	28
Técnico	21
Profesional con Licenciatura	14
Profesional con título de 4to nivel	9

Elaboración Propia.

Cuando las variables que se utilizan son cuantitativas discretas para la tabulación de datos se utilizan escalas numéricas y se ordenan en forma creciente; ejemplo, si se consulta por el número de hijos de un grupo de personas, estos deben ordenarse de forma creciente. (ver tabla 2):

Tabla 2. Ordenación de datos para la variable cuantitativa discreta

Grupo Personas	N° de Hijos
45	0
32	1
28	2
21	3
14	4

Elaboración Propia

Cuando los datos son numerosos o corresponden a la variable cuantitativa continua, la ordenación en forma creciente ya no es funcional y, por lo tanto, se deben agrupar los datos en intervalos, mediante el siguiente procedimiento: calcular rango o recorrido, número de intervalos o clases, amplitud del intervalo de clase, límites de los intervalos y tabulación.

Construcción de tablas para datos agrupados

Para la construcción de tabla para datos agrupados se deben considerar una serie de pasos como se detalla a continuación:

a. Recorrido o Rango (R)

El recorrido es la diferencia entre los valores mayor y menor de la distribución. Indica la longitud del tramo en el que se hallan los datos. También se llama rango.

$$\mathbf{R = x_{max} - x_{min}}$$

Donde, R: rango o recorrido.

x_{min} : límite inferior (menor valor de la variable).

x_{max} : límite superior (mayor valor de la variable).

b. Intervalos de clases (*m*)

Para obtener el número de intervalos de clases, es usando la raíz cuadrada del tamaño de la muestra. Así pues, otra fórmula para calcular el número de clases idóneo es la siguiente:

$$m = \sqrt{N}$$

c. Amplitud de clase (C)

La amplitud de los intervalos (C) en Estadística es el rango de valores que pertenecen a un intervalo. Es decir, la amplitud de una clase es el ancho entre los límites de la clase. Por lo tanto, la amplitud de una clase es igual a la diferencia entre los dos límites del intervalo de la clase. Para el cálculo de la amplitud del intervalo se toma el cociente entre la amplitud del rango (AR) y el número de intervalos (m) que se considere más adecuado, teniendo en cuenta que este resultado (C) debe ser una cantidad exacta.

$$C = \frac{R}{m}$$

Ejemplo: Los siguientes datos corresponden a las calificaciones de 40 estudiantes sobre 100 puntos.

Tabla 3. Calificaciones de estudiantes sobre 100 puntos.

70	59	58	46	84	47	70	80	67	47
67	52	69	60	67	94	68	83	70	57
57	73	64	63	74	82	67	58	66	70
65	85	77	70	72	73	67	61	76	73

a. Recorrido

$$\mathbf{R = x_{max} - x_{min}}$$

$$R = 94 - 46 = 48$$

b. Intervalos de clases

$$\boldsymbol{m = \sqrt{N}}$$

$$m = \sqrt{40}$$

$$m = 6{,}32 \approx 6$$

c. Amplitud de clase

Para el cálculo de la amplitud usaremos el cociente de rango para el número de intervalos de clases.

$$\boldsymbol{C = \frac{R}{m}}$$

$$C = \frac{48}{6} = 8$$

Con la información anterior se presenta en la siguiente tabla de frecuencias: por uso conveniente para la construcción de la tabla de frecuencia se debe incluir la marca de clase o punto medio de cada intervalo, el mismo se calcula sumando los límites de cada intervalo y dividiendo para 2. Ejemplo, en el primer intervalo los límites son 46 – 54; por tanto, Xi = (46 + 54)/2 = 50

Intervalos	Marca de clase
$\mathbf{I_i}$	$\mathbf{x_i}$
[46 – 54)	50
[54 – 62)	58
[62 – 70)	66
[70 – 78)	74
[78 – 86)	82
[86 – 94)	90

Elaboración Propia.

d. Frecuencia absoluta

Se denomina frecuencia absoluta (f_i) a la cantidad de veces que se presenta el valor x_i de la variable X en la muestra o la población. Las frecuencias absolutas para datos corresponden a las calificaciones de 40 estudiantes sobre 100 puntos. Esta determinada por las veces que se repiten los datos en cada intervalo.

e. Frecuencia relativa

La frecuencia relativa ($\mathbf{f_{ri}}$) se define como el porcentaje de frecuencia absoluta en relación al total de datos de la muestra (n). Se obtiene con el cociente entre la frecuencia absoluta y el total de datos, usando la siguiente ecuación:

$$f_{ri} = \frac{n_i}{n} * 100$$

Siendo **n** el total de datos.

f. Frecuencia absoluta acumulada

La frecuencia absoluta acumulada (f_{ai}) para un valor x_i de una variable X es la adición de las frecuencias absolutas n_i hasta alcanzar la totalidad de los datos. Se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$f_{ai} = \sum_{k=1}^{i} n_i$$

g. Frecuencia relativa acumulada

La frecuencia relativa acumulada (f_{air}) para un valor x_i de una variable X es la adición de las frecuencias relativas f_{ri} hasta alcanzar la totalidad de los datos. Se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$f_{air} = \sum_{k=1}^{i} f_{ri}$$

Con los datos de la tabla 3 se construye la siguiente tabla

Tabla 6. Distribución de frecuencia datos agrupados.

Intervalos	Marca de clase	Frecuencia	Producto	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada	Frecuencia acumulada relativa
I_i	x_i	f_i	$x_i f_i$	f_{ri}	f_{ai}	f_{air}
[46 – 54)	50	4	200	10%	4	10%
[54 – 62)	58	7	406	17,5%	11	27,5%
[62 – 70)	66	16	1056	40%	27	67,5%
[70 – 78)	74	7	518	17,5%	34	85%
[78 – 86)	82	5	410	12,5%	39	97,5%
[86 – 94)	90	1	90	2,5%	40	100%
		$n = \Sigma f_i = 40$	$\Sigma x_i f_i = 2680$	$\Sigma f_i = 100\%$		

Elaboración Propia.

Medidas de Tendencia Central para Datos Agrupados

Los cálculos estadísticos cuando el grupo de datos que se desea analizar son muy alto, pueden generar un nivel de error considerable, por lo que es conveniente una agrupación de datos en un cuadro o tabla de distribución y agrupación de datos.

Estadística: Es la parte de las matemáticas que se ocupa de recoger, organizar y analizar grandes cantidades de datos para estudiar las características o el comportamiento de un colectivo lo que permite el análisis de datos mediante una organización y agrupación utilizando tablas de frecuencias.

Medidas de centralización para datos agrupados

Para calcular las medidas de tendencia central, con datos agrupados, se usan tablas estadísticas. Las tablas estadísticas son compilaciones numéricas estructuradas y fáciles de interpretar, que sintetizan los datos de una población.

Los siguientes datos representados en la tabla, corresponden a los minutos de teléfono de celular que ocupan mensualmente un grupo de personas. Calcula la media, mediana y moda.

Tabla 1. Distribución de frecuencia datos agrupados

Intervalos	Marca de clase	Frecuencia Absoluta Núm. de persona	Producto de la marca de clase por la frecuencia	Frecuencia acumula	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada relativa
x	x_i	f_i	$x_i f_i$	F_i	$f_{r\,\%}$	$f_{ri}\,\%$
[45 – 55)	50	4	200	4	10	10
[55 – 65)	60	10	600	14	25	35
[65 – 75)	70	18	1260	32	45	80
[75 – 85)	80	7	560	39	17,5	97,5
[85 – 95)	90	1	90	40	2,5	100
		N = 40	**$\Sigma x_i f_i$ = 2710**		100%	

Media aritmética

La media aritmética es la medida de tendencia central más utilizada y la de mayor representatividad en los análisis estadísticos. Representa el promedio del conjunto de datos de la muestra.

La media aritmética de datos agrupados, se calcula así:

- Determinamos la marca de clase (xi)
- Multiplicamos la marca de clase por la frecuencia y sumamos los resultados.
- Dividimos el resultado anterior entre el número de datos.

Si el conjunto de datos se ha agrupado en intervalos, el cálculo de la media aritmética se realiza mediante la siguiente fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N}$$

Donde:

$\bar{x}$: Media aritmética

$\sum x_i f_i$: Sumatoria del producto de la marca de clase y la frecuencia.

N: Número total de datos

Utilizando los datos del ejemplo anterior hallamos la media aritmética.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{2710}{40} = 67,75$$

Mediana (Me)

La mediana en un conjunto de datos es el valor que ocupa el lugar central, para datos agrupados se determina el intervalo en el que se encuentra dicho parámetro.

La mediana para datos agrupados se calcula de la siguiente manera:

- Determinamos las frecuencias absolutas acumuladas Fi.
- Dividimos el total de casos para dos, así se conoce el valor medio de la ordenación N/2.
- Si N/2 está entre dos valores de la columna de frecuencias absolutas acumuladas, el valor de la mediana se encuentra en el intervalo igual al mayor de ellas.
- Si N/2 es igual a la frecuencia acumulada, entonces el límite superior de dicho intervalo corresponde a la mediana.
- Luego utilizamos la fórmula

$$Me = L_i + A\left[\frac{\left(\frac{N}{2}\right) - F_{ai}}{f_i}\right]$$

Donde:

L_i: Límite inferior del intervalo en el que se encuentra la mediana.

A: Amplitud o ancho del intervalo en el que se encuentra la mediana.

$N/2$: mitad de los datos.

F_{ai}: Frecuencia absoluta acumulada menor a N/2

f_i: Frecuencia absoluta del intervalo en el que se encuentra la mediana.

Ejemplo, con los datos de la tabla anterior, encontrar la mediana

Tabla 2. Distribución de frecuencia datos agrupados

Intervalos	Marca de clase	Frecuencia Absoluta Núm. de persona	Producto de la marca de clase por la frecuencia	Frecuencia acumula	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada relativa
x	x_i	f_i	$x_i f_i$	F_i	$f_{r\,\%}$	$f_{ri}\,\%$
[45 – 55)	50	4	200	4	10	10
[55 – 65)	60	10	600	14	25	35
[65 – 75)	70	18	1260	32	45	80
[75 – 85)	80	7	560	39	17,5	97,5
[85 – 95)	90	1	90	40	2,5	100
		N = 40	$\Sigma x_i f_i = 2710$		100%	

Elaboración Propia.

Primero se busca n/2 = 40/2 = 20 L_i: 65 A_i: 10 n/2: 20 F_{ai}: 14 f_i: 18	Se sustituyen los datos en la ecuación $$Me = 65 + 10\left[\frac{20-14}{18}\right]$$ $$\boldsymbol{Me = 68{,}33}$$

Moda

La moda se encuentra en el intervalo que tiene mayor frecuencia.

Se determina de la siguiente manera:

- Buscamos el intervalo que tiene mayor frecuencia.
- Luego utilizamos la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{Mo = L_i + A_i\left[\frac{f_{i+1}}{f_{i-1} + f_{i+1}}\right]}$$

Donde:

L_i: Límite inferior del intervalo en el que se encuentra la moda.

A_i: Amplitud del intervalo en el que se encuentra la moda.

f_{i+1}: Frecuencia superior al intervalo en el que se encuentra la moda

f_{i-1}: Frecuencia inferior al intervalo en el que se encuentra la moda

Ejemplo, con los datos de a tabla 1, encontrar la moda.

Tabla 3. Distribución de frecuencia datos agrupados.

Intervalos	Marca de clase	Frecuencia Absoluta Núm. de persona	Producto de la marca de clase por la frecuencia	Frecuencia acumula	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada relativa
x	x_i	f_i	$x_i f_i$	F_i	f_r %	f_{ri} %
[45 – 55)	50	4	200	4	10	10
[55 – 65)	60	10	600	14	25	35
[65 – 75)	70	18	1260	32	45	80
[75 – 85)	80	7	560	39	17.5	97.5
[85 – 95)	90	1	90	40	2.5	100
		N = 40	$\Sigma x_i f_i$ = 2710		100%	

Elaboración Propia.

Intervalos Núm. de personas	Frecuencia absoluta (f_i)
[65 – 75)	18

Datos

Se aplica la ecuación de la moda sugerida.

$$Mo = 65 + 10\left[\frac{7}{10\ +\ 7}\right]$$

$$Mo = 65 + 10[0{,}41]$$

$$Mo = 65 + 4{,}1$$

L_i: 65

A_i: 10

f_{i+1}: 7

f_{i-1}: 10

$$Mo = 69{,}1$$

Medidas de Dispersión

Introducción

Las medidas de tendencia central que posibilitan la representación del conjunto de datos por medio de un valor, es necesario conocer la variabilidad o la dispersión que los datos pueden tener en relación a una medida central. En los análisis estadísticos, las medidas de dispersión más representativas son: rango, rango intercuartil, varianza, desviación estándar y coeficiente de variación.

Medidas de dispersión para datos no agrupados

Los parámetros de dispersión de un conjunto de datos nos informan sobre la dispersión de los datos considerados, es decir, nos dicen si estos están más o menos separados. Existen diferentes parámetros de dispersión.

Los más utilizados son el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación estándar.

Recorrido o Rango

La medida más simple de dispersión es el rango. Representa la diferencia entre los valores máximo y mínimo de un conjunto de datos, y se representa por ***r***.

En forma de ecuación tenemos:

$$Rango \;=\; Valor\ máximo - valor\ mínimo$$

El rango se emplea mucho en aplicaciones de control de procesos estadísticos, debido a que resulta fácil de calcular y entender.

Ejemplo:

Consideramos la serie de datos de la variable estadística que representa la edad de los 16 alumnos de un curso de matemática, tenemos:

22 11 49 24 31 19 25 19 15 23 16 24 19 30 18 15

Recuerda ordenar los datos de menor a mayor:

11 15 15 16 18 19 19 19 22 23 24 24 25 30 31 49

El recorrido de esta serie de datos es:

$$\boldsymbol{R} = 49 - 11 = 38$$

Desviación media.

La desviación media es la media aritmética de las desviaciones de todos los datos respecto a su media. Se representa por D_m.

En general, escribimos abreviadamente: $D_m = \frac{\sum_{i=1}^{N}|x_1-\bar{X}|}{N}$. Se puede utilizar para mayor comprensión:

$$D_m = \frac{\sum|x_1 - \bar{X}|}{N}$$

Donde:

$\boldsymbol{D_m}$ = Desviación media

$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{N}|x_1 - \bar{X}|}$ = Sumatoria del valor absoluto de las desviaciones de $x_1 - \bar{X}$

N = número total de datos

Ejemplo:

Calculemos la desviación media de la distribución: 5, 3, 7, 8, 5, 8, 5, 7, 9, 3, 3

1. Calculemos la media aritmética del conjunto de datos:

$$\boldsymbol{\bar{X}} = \frac{5 + 3 + 7 + 8 + 5 + 8 + 5 + 7 + 9 + 3 + 3}{11}$$

$$\bar{X} = \frac{63}{11}$$

$$\bar{X} = 5{,}73$$

Se aproxima el promedio a 6 para facilitar los cálculos.

$$\bar{X} \approx 6$$

2. Apliquemos la fórmula para calcular la desviación media:

$$D_m = \frac{|5 - 6| + |3 - 6| + |7 - 6| + |8 - 6| + |5 - 6| + |8 - 6| + |5 - 6| + |7 - 6| + |9 - 6| + |3 - 6| + |3}{11}$$

$$D_m = \frac{1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3}{11}$$

$$D_m = \frac{21}{11}$$

$$D_m = 1{,}91$$

Varianza

Nos indica la variabilidad de los datos, es decir que tan alejados están los datos de su media. Es la media aritmética de los cuadrados de las diferencias o desviaciones de cada dato hasta la media:

Varianza poblacional (para una población: $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N}$

Varianza muestral (para una muestra): $S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$

Ejemplo:

Calcular la varianza poblacional y muestral de los siguientes datos correspondiente a las edades de un grupo de niños.

5, 6, 6, 7, 8

Procedimiento:

1. Se calcula la media aritmética,

$$\bar{X} = \frac{5 + 6 + 6 + 7 + 8}{5} = 6{,}4$$

2. Se para la facilidad del ejercicio construiremos una tabla.

3.

Xi	$(x_i - \bar{X})^2$
5	1,96
6	0,16
6	0,16
7	0,36
8	2,56
$\sum(x_i - \bar{X})^2 = 5{,}2$	

ra obtener $(x_i - \bar{X})^2$

= 5

= 6.4

procede a restar:

$5 - 6.4 = -1{,}4$

eleva al cuadrado (-1.4)

Ahora se aplica la ecuación varianza poblacional. $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N}$

$$\sigma^2 = \frac{5{,}2}{5} = 1{,}04\ años^2$$

4. Ahora se aplica la ecuación varianza muestral. $S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$

$$S^2 = \frac{5{,}2}{5 - 1} = 1{,}3\ años^2$$

Nótese que si se interpreta la varianza se estaría diciendo que la variación en las edades de los niños es de 1,04 años cuadrados, lo cual no es lógico. En este sentido, cobra importancia la varianza como medida de transición para la desviación típica o estándar.

Desviación estándar

La desviación estándar es considerada la medida de dispersión con mayor representatividad para un conjunto de datos. Matemáticamente se calcula como la raíz cuadrada positiva de la varianza, y se denota por (s) cuando se estima para la muestra y por (σ) si se calcula para la poblacional.

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Con los valores obtenidos en el apartado anterior calcular la desviación estándar para la muestra y la población.

$$\sigma = \sqrt{1{,}04\ \text{años}^2} = 1{,}02\ \text{años}. \quad \textit{Para la población}$$

$$S = \sqrt{1{,}3\ \text{años}^2} = 1{,}14\ \text{años}. \quad \textit{Para la muestra}$$

Medidas de dispersión para datos agrupados

Para datos agrupados el cálculo de la varianza se realiza usando la siguiente ecuación:

$$\sigma^2 = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|^2 * f_i}{N}$$

Con el uso de la ecuación y los datos que se presentan en la tabla calcular la varianza y la desviación estándar.

$$\boldsymbol{x_i = 10 + 15}$$

$$\boldsymbol{x_i = \frac{25}{2}}$$

$$\boldsymbol{x_i = 12,5}$$

Edades	x_i	f_i	$\boldsymbol{X_i \cdot f_i}$	$\boldsymbol{(X - \bar{X})^2}$	$\boldsymbol{(X - \bar{X})^2 * f}$
[10 – 15)	12,5	6	75	241,18	1447,08
[15 – 20)	17,5	7	122,5	110,88	776,16
[20 – 25)	22,5	10	225	30,58	305,80
[25 – 30)	27,5	11	302,5	0,28	3,08
[30 – 35)	32,5	15	487,5	19,98	299,70

$$\boldsymbol{X_i \cdot f_i}$$

$$\boldsymbol{12,5 \times 6}$$

$$\boldsymbol{= 75}$$

$$\boldsymbol{(X - \bar{X})^2}$$

$$(12.5 - 28{,}03)^2$$

$$(-15.53)^2$$

$$\boldsymbol{= 241,18}$$

$$(17.5 - 28{,}03)^2$$

$$(-10.53)^2$$

$$\boldsymbol{= 110,88}$$

[35 – 40)	37,5	17	637,5	89,68	1524,56
Totales		$\sum n = 66$	$\sum x * f =$ **1850**		$\sum =$ **4356,38**

Ahora se calcula el promedio, recuerde que para datos agrupados el promedio es:

$$\bar{X} = \frac{\sum X * f}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{1840}{66} = 28{,}03$$

Con los datos obtenidos de la construcción de la tabla se aplica la ecuación de varianza.

$$\sigma^2 = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|^2 * f_i}{N}$$

Se sustituye en la ecuación

$$\sigma^2 = \frac{4356{,}38}{66} = 66{,}01$$

La desviación media se calcula usando la ecuación $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$$\sigma = \sqrt{66{,}01\ años^2}$$

$$\sigma = 8{,}12\ años$$

Referencias Bibliográficas

Basurto Hidalgo E. & Castillo Peña G. (2012). Álgebra. Primera Edición.

Haeussler Jr. Ernest & Paul S. Richard (2003). Matemáticas para administración y economía. Décima Edición.

Ministerio de Educación del Ecuador (2017). Adaptaciones curriculares para la educación con personas jóvenes y adultas. Subnivel superior de educación general básica y nivel de bachillerato.

A. Rendón Trejo, J. Rodríguez Franco, A Morales Alquicira (1998). *Introducción al Álgebra Lineal y de Matrices Aplicaciones con Excel*, Primera Edición