UNIDAD EDUCATIVA JUAN MONTALVO

EDUCANDO CON VERDAD, CIENCIA Y LIBERTAD

C11 Modalidad a Distancia – Virtual

Matemática

Guía de Estudios para Examen de Ubicación

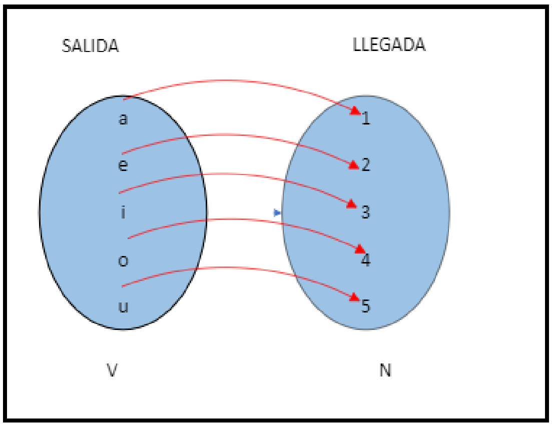
2do. BGU

Relación

Una relación es una regla que establece una correspondencia entre un primer conjunto A de elementos llamado salida y un segundo conjunto B de elementos llamado llegada de manera que a cada elemento del conjunto de salida le corresponda uno a más elementos del conjunto de llegada.

Frecuentemente nos encontramos con parejas de conjuntos cuyos elementos están relacionados de una u otra forma; veamos algunos ejemplos:

- Cada casa de una ciudad tiene generalmente asociado un número, y así, tenemos entonces una relación entre el conjunto de casas de la ciudad y el conjunto de los números;
- Podemos pensar también, que entre el conjunto de todas las personas y el conjunto de todas las casas, existe una relación que relaciona, de manera natural, a cada persona con la casa en que vive;
- Si llamamos V al conjunto de las vocales y N al conjunto de los números naturales, una manera de relacionar estos conjuntos es asociar la “a” con el 1, la “e” con el 2, la “i” con el 3, la “o” con el 4 y la “u” con el 5.



Descripción: Representación sagital de una relación.
Fuente: M.T, (2022).

Función

Una función es una correspondencia entre conjuntos que se produce cuando cada uno de los elementos del primer conjunto se halla relacionado con **un solo elemento** del segundo conjunto. Estamos en presencia de una función cuando de cada elemento del primer conjunto solamente sale una única flecha.

FUNCIÓN

- Los elementos que forman el conjunto de partida son el dominio de la función.

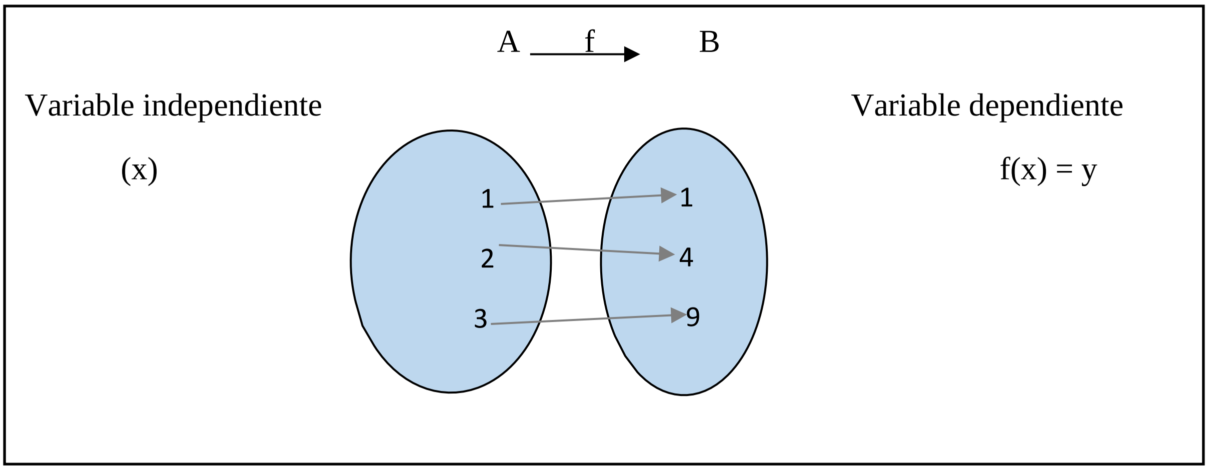
Dom f(x)

- Los elementos que forman el conjunto de llegada son el rango de la funci

Es una relación donde cada elemento del conjunto de partida se relaciona con un solo elemento del conjunto de llegada.

Una función está constituída por una variable independiente "x" y una variable dependiente "y".

Se representa en diagrama sagital y en un sistema de coordenadas cartesianas (pares ordenados).



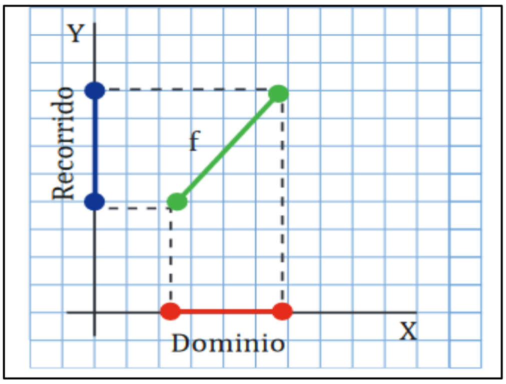
Conjunto de partida Conjunto de llegada

Descripción: Representación sagital de una función.
Fuente: Fonseca, N (2022).

Dominio y rango

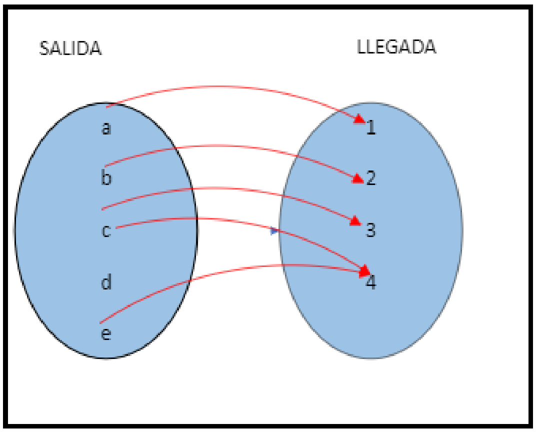
Dominio: es el conjunto de valores que toma la función para la variable independiente y se lo representa por Dom f(x).

Recorrido o rango: es el conjunto de valores que toma la función para la variable dependiente se lo representa por Ran f(x).

El dominio se representa por el conjunto de valores de la variable "x" obtenidos al proyectar los puntos de la gráfica sobre el eje de las abscisas. **El recorrido** se representa por el conjunto de valores de la variable "y" obtenidos al proyectar los puntos de la gráfica sobre el eje de ordenadas.	 **Descripción:** Determinación gráfica dominio y rango de una función. **Fuente:** MINEDUC (2019).

Ejemplo:

Considere la función mostrada en el siguiente diagrama, determine el dominio y rango.



Descripción: Representación sagital
Fuente: MINEDUC (2023)

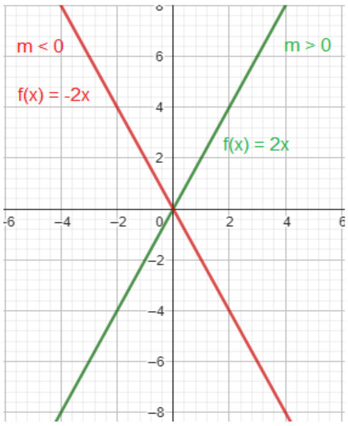
El dominio es el conjunto {a, b, c, e}; d no está en el dominio, ya que la función no está definida para d.

El rango es el conjunto {1, 2, 3, 4}

Función lineal

Una función de la forma $(x) = mx + b$, se conoce como función lineal o recta. Donde $m \neq 0$ y es la pendiente, b es el intercepto con el eje y. Cuando la pendiente es positiva es creciente y cuando es negativa es decreciente.

- Sí m > 0 es creciente
- Sí m < 0 es decreciente



Descripción: Gráfica función lineal.
Fuente: M.T (2023).

El dominio y el rango para una función lineal son todos los números reales.

Dom f(x) = $\mathbb{R}$
Ran f(x) = $\mathbb{R}$

Gráfico de una función lineal

Para graficar una función lineal se asigna una tabla de valores para la variable independiente y se evalúa la función para encontrar el valor del punto con coordenadas (x, y).

Los puntos correspondientes se los ubica en el plano cartesiano, obteniendo una línea recta al unirlos.

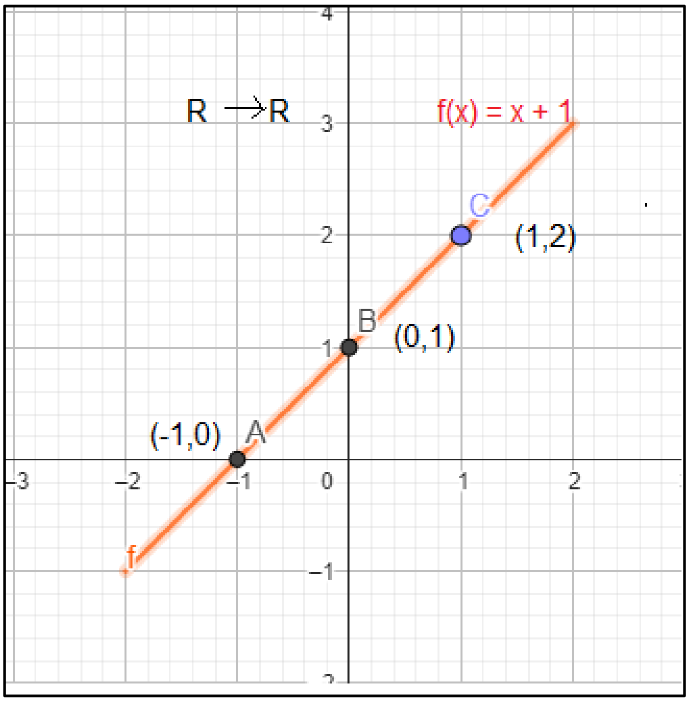
Ejemplo: Dada la recta: $f(x)=x+1$, representar la función en el plano cartesiano.

Para realizar la gráfica correspondiente, se realiza una tabla de valores evaluando la función para obtener los puntos y ubicarlos en el plano cartesiano.

Para una función lineal basta con dos puntos para graficarla.

Evaluación de la función **Gráfica de la función**

x	y	(x, y)
-1	0	(-1,0)
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)

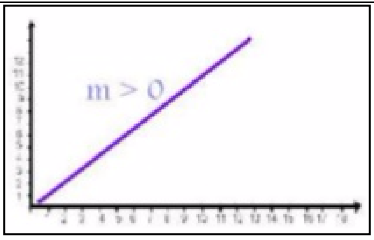
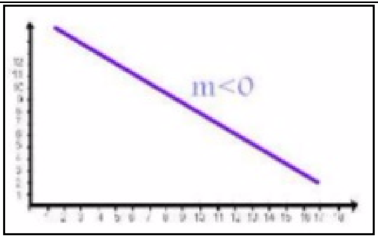
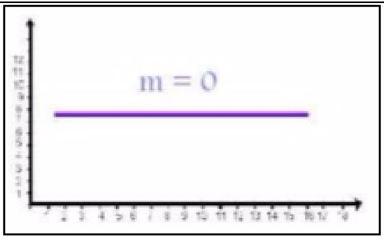
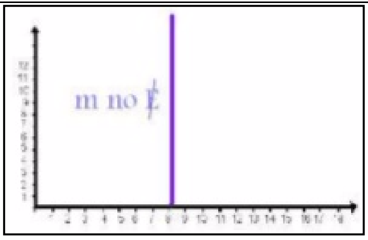


Descripción: Gráfica función lineal.
Fuente: M.T (2023).

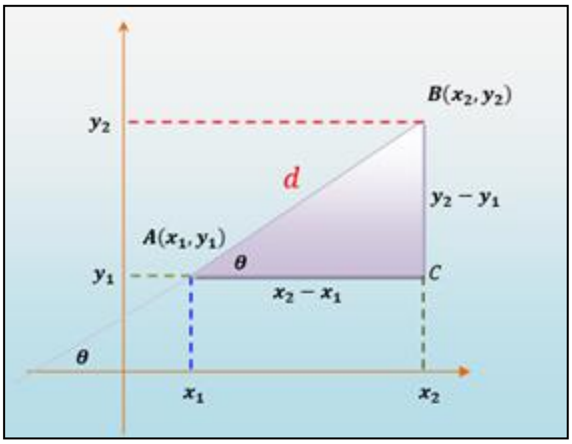
Pendiente de una recta

Se define como la tangente del ángulo de inclinación (tan θ). La pendiente de una recta se la designa por la letra "m". La pendiente puede clasificarse de la siguiente manera:

Pendiente positiva	Pendiente negativa

 **Descripción:** Gráfico pendiente positiva. **Fuente:** Geogebra (2022).	 **Descripción:** Gráfico pendiente negativa. **Fuente:** Geogebra (2022).
Si “m” es positiva (+) la recta es creciente.	Si “m” es negativa (–) la recta es decreciente.
Pendiente nula	**Pendiente indeterminada**
 **Descripción:** Gráfico pendiente nula. **Fuente:** Geogebra (2022).	 **Descripción:** Gráfico pendiente indeterminada. **Fuente:** Geogebra (2022).
Si m = 0, la recta es horizontal.	Si m = INDETERMINADA, la recta es vertical.

Cálculo de la pendiente

Para calcular el valor de la pendiente de la recta utilizaremos dos puntos conocidos cómo P_1 (x_1, y_2) y P_2 (x_2 , y_2): el valor de la pendiente está definida por la siguiente fórmula $\mathbf{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$	 **Descripción:** Cálculo de la pendiente. **Fuente:** Fonseca, N (2022).

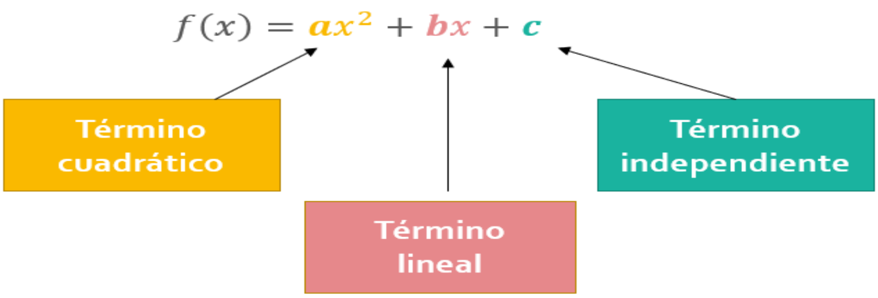
Partiendo de la ecuación general de la recta. Ax + By + C = 0 La pendiente se calcula con: $m = -\frac{A}{B}$	**Conociendo 2 puntos por los que pasa la recta.** A (x_1, y_1); B (x_2, y_2) La pendiente se calcula con: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ejemplo 1: Dada la recta 3x + 4y – 5 = 0 calcular la pendiente. Se identifica los valores de A y B. A = 3; B = 4 Se reemplaza los valores en la fórmula. $m = -\frac{A}{B}$ $\boldsymbol{m = -\frac{3}{4}}$ Siempre que sea posible se debe simplificar hasta la mínima expresión.	**Ejemplo 2:** Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(5,-3); B(6,5) Reemplazar con los signos correspondientes y simplificar si es posible. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $m = \frac{5-(-3)}{6-5}$ $m = \frac{5+3}{6-5}$ **m = 8**

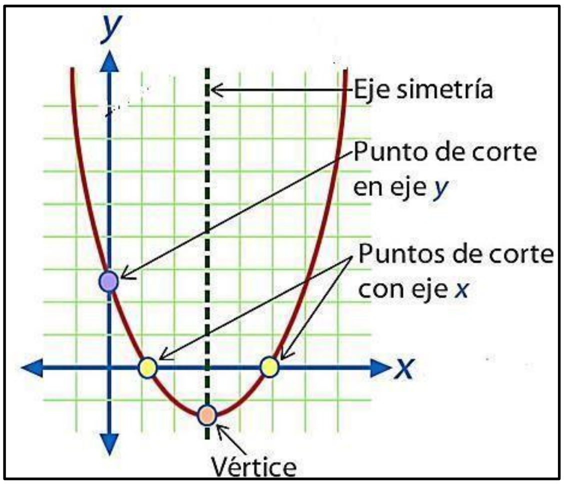
Función cuadrática

Una función *f* es una función cuadrática si f(x) = ax^2 + bx + c, donde a, b y c son números reales con a ≠ 0. El exponente de la variable independiente es el número 2.

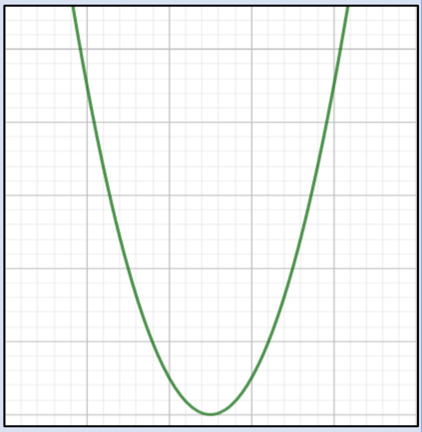
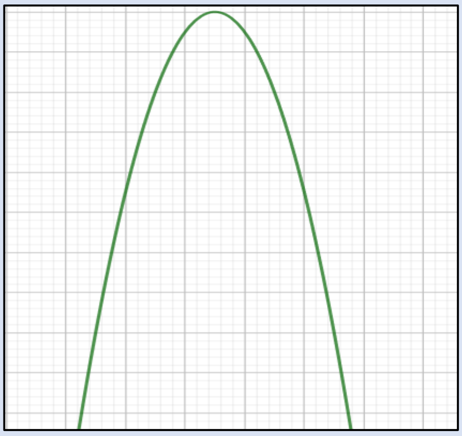
Términos de la función cuadrática



- Una característica de la gráfica de una función cuadrática siempre será una parábola.
- Dicha parábola tendrá algunas características o elementos bien definidos dependiendo de los valores de la ecuación que la generan.

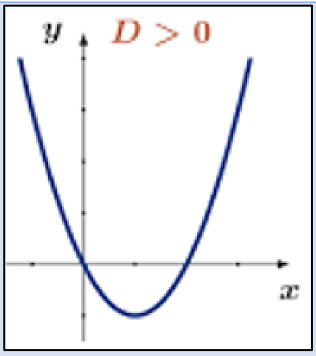


La gráfica de una función cuadrática creciente o decreciente.

si a > 0 **la parábola se abre hacia arriba(creciente)**	**si a < 0** **la parábola se abre hacia abajo (decreciente)**
 **Descripción:** Parábola con a > 0. **Fuente:** Fonseca, N (2022).	 **Descripción:** Parábola con a < 0. **Fuente:** Fonseca, N (2022).

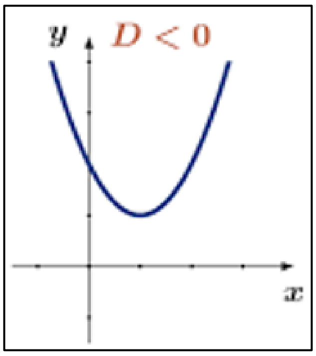
Discriminante (D)

DISCRIMINANTE $D = b^2 - 4ac$	NATURALEZA DE LAS RAÍCES	SIGNIFICADO DE LAS RAÍCES EN LA GRÁFICA
Si $D = b^2 - 4ac > 0$	Dos raíces reales	Interseca al eje x en dos puntos.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>


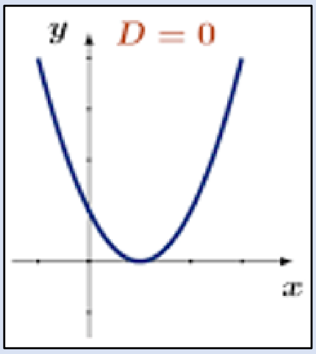
Descripción: Parábolas con D > 0.

Fuente: blogspot.com (2016).
</td>
</tr>
<tr>
<td>Si D = b² – 4ac < 0</td>
<td>Raíces IMAGINARIAS</td>
<td>
No interseca al eje x



Descripción: Parábolas con D < 0.

Fuente: blogspot.com (2016).
</td>
</tr>
<tr>
<td>Si D = b² – 4ac = 0</td>
<td>Una raíz real o raíces iguales.</td>
<td>
Interseca al eje x en un punto.



Descripción: Parábolas con D = 0.

Fuente: blogspot.com (2016).
</td>
</tr>
</table>

Intersección con los ejes

Se asigna el valor de "0" a las variables dependiente e independiente respectivamente para encontrar intercepto.

Intercepto vertical	Intercepto horizontal
Si x = 0 $f(x) = ax^2 + bx + c$ $y = a(0)^2 + b(0) + c$ $y = c$	Si y = 0 $f(x) = ax^2 + bx + c$ $ax^2 + bx + c = 0$

El intercepto horizontal hace referencia al corte con el eje x, se resuelve la ecuación de segundo grado por factorización o por la fórmula general, de preferencia utilizar la segunda opción.

Fórmula general: $\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Donde a, b, c son los coeficientes de cada término de la ecuación cuadrática.

Cálculo del vértice (h,k)

Coordenada horizontal del vértice: $h = -\frac{b}{2a}$

Coordenada vertical del vértice: k = *f* (h); Evaluamos la función para *f* (h)

Dominio y rango

El **dominio** de una función cuadrática son todos los Reales.

Dom f(x) = R

El **recorrido o rango** de una función cuadrática, está en función de la coordenada vertical del vértice:

- Si la parábola se abre hacia arriba el rango se define como:

Ran f(x) = [k, + ∞)

- Si la parábola se abre hacia abajo el rango se define como:

Ran f(x) = (- ∞, k]

Eje de simetría

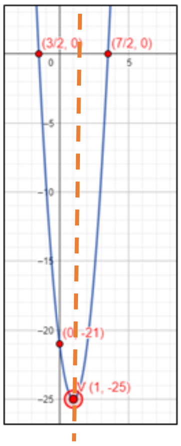
Para calcular el Eje de Simetría se emplea la siguiente fórmula.

$x = -\frac{b}{2a}$

Ejemplo 1: Calcular analíticamente: el vértice, la orientación, el eje de simetría y el corte con el eje de las ***y*** de la siguiente función cuadrática:

$f(x) = 4x^2 - 8x - 21$

ANÁLISIS DEL COEFICIENTE a	a = 4; b = -8; c = -21 **a > 0 la parábola se abre hacia arriba.**
ANÁLISIS DEL DISCRIMINANTE **$D = b^2 - 4ac$**	$D = (-8)^2 – 4(4)(-21)$ $D = 64 + 336$ **D = 400** $D > 0$ Dos raíces reales, interseca al eje x en dos puntos.
INTERCEPTO VERTICAL	Si x = 0 $y = 4(0)^2 – 8(0) – 21$ $y = -21$ **$P_1(0, -21)$**
INTERCEPTO HORIZONTAL	Si y = 0 $4x^2 - 8x - 21 = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{400}}{2(4)}$ $x = \frac{8 \pm 20}{8}$ $x_1 = \frac{8+20}{8}$ $x_2 = \frac{8-20}{8}$ $x_1 = \frac{28}{8}$ $x_2 = \frac{-12}{8}$ $x_1 = \frac{7}{2}$ $x_2 = -\frac{3}{2}$ $\boldsymbol{P_2 = \left(\frac{7}{2}, 0\right)}$ $\boldsymbol{P_3 = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)}$

CÁLCULO DEL VÉRTICE (h, k)	$h = -\frac{b}{2a}$ $h = -\frac{-8}{2(4)}$ h = 1 k = f (h) k = $4(1)^2 - 8(1) - 21$ k = 4 – 8 - 21 k = -25 V = (h, k) **V = (1, -25)**
DOMINIO Y RANGO	**Dom f(x)** = R **Ran f(x)** = [k, + ∞) → **Ran f(x)** = [-25, + ∞)
GRÁFICA DE LA FUNCIÓN	 **Descripción:** Gráfico parábola. **Fuente:** M.T (2023).
CÁLCULO DEL EJE DE SIMETRÍA	x = $-\frac{b}{2a}$ x = $-\frac{-8}{2(4)} = 1$

Función Racional

Son las funciones que están formadas por el cociente de dos funciones polinomiales, son de la forma: f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P(x) y Q(x) son funciones polinomiales sólo que $Q(x) \neq 0$.

El dividendo P(x) se llama numerador y el divisor Q(x) se llama denominador, la función tiene la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Entonces recibe el nombre de función racional. Este tipo de función posee asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. En este capítulo nos interesa particularmente polinomios de grado 1 para P(x) y Q(x), de la forma:

f(x) = $\frac{ax+b}{cx+d}$

Cálculo de las asíntotas

Una asíntota es una recta a la cual se aproxima indefinidamente a una función, sin llegar a tocarla. Las asíntotas son rectas paralelas a los ejes cuando son verticales y horizontales.

Asíntotas verticales:

Para la función racional f(x) = $\frac{ax+b}{cx+d}$ la recta x = - $\frac{d}{c}$, es la única asíntota vertical de la función

Asíntotas horizontales:

Para la función racional f(x) = $\frac{ax+b}{cx+d}$ la recta y = $\frac{a}{c}$, es la única asíntota horizontal de la función

Cálculo del dominio de una función racional

El dominio de la función es el conjunto de los números reales, menos aquellos valores que indefinan la función, es decir aquellos valores que hacen cero el denominador, por ejemplo con la función $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ en este caso el número 1 indefine la función porque al reemplazar el valor en el denominador se establece división para cero.

En este tipo de funciones el dominio está restringido hacia los valores que no puede tomar la variable independiente, para ello se iguala a cero el denominador, despejamos la variable independiente y se restringe los valores.

Cálculo del rango de una función racional

El rango de una función se lo determina encontrando todos y cada uno de los valores que debe tomar la variable DEPENDIENTE.

En el caso de las funciones racionales se recomienda despejar la variable independiente con la finalidad de analizar las restricciones que se puedan presentar debido a la ubicación de la variable dependiente.

Gráfico de una función racional

Lo más importante para construir el gráfico de una función racional es conocer sus asíntotas y haber definido los valores del dominio y el rango, con estos datos se sugiere utilizar la tabla de valores en el intervalo de [-2, 2] y también se puede utilizar la aplicación GEOGEBRA para dibujar la función.

Ejemplo 1: Determine las restricciones, asíntotas, dominio, rango y grafique.

$$f(x) = \frac{1}{x+4}$$

a = 0
b = 1
c = 1
d = 4

Asíntota vertical	x = - $\frac{d}{c}$,	x = - $\frac{4}{1}$ = -4
Asíntota horizontal	x = $\frac{a}{c}$	x = $\frac{0}{1}$ = 0
Dominio	x + 4 = 0 x = -4	Dom f(x) = ℝ - {-4}
Rango	$y = \frac{1}{x+4}$ y (x + 4) = 1 xy + 4y = 1 xy = 1 – 4y $x = \frac{1-4y}{y}$	**Restricción:** y ≠ 0 y = 0 ← asíntota horizontal **Ran f(x) = ℝ – {0}**
Tabla de valores	(ver tabla)	

x	y	f(x)
-2	0,50	f(x)= $\frac{1}{(-2)+4}$
-1	0,33	f(x)= $\frac{1}{(-1)+4}$
0	0,25	f(x)= $\frac{1}{(0)+4}$
1	0,20	f(x)= $\frac{1}{(1)+4}$

	2	0,16	f(x)= $\frac{1}{(2)+4}$	
Gráfico				

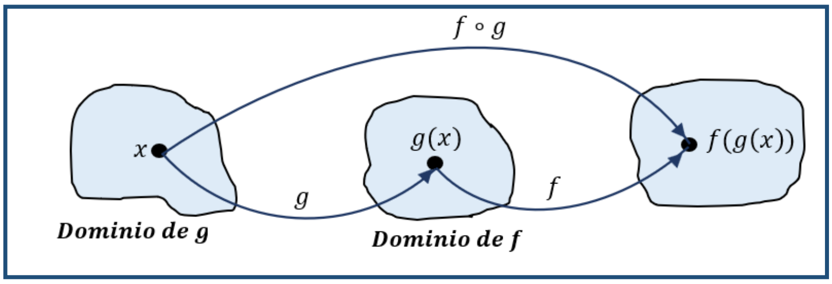
Descripción: Gráfica función racional.
Fuente: Fonseca, N (2022).

Composición de Funciones

Sean las funciones $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C}$, la composición de la función $\boldsymbol{f}$ con la función $\boldsymbol{g}$ está definida por:

$$(f\ o\ g)(x) = f(g(x))$$

En un diagrama de flechas, lo vemos de la siguiente manera:



Descripción: Composición de funciones.
Fuente: Pachacama, M (2023).

El dominio de $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$ es siempre un subconjunto del dominio de $\boldsymbol{g}$ y el rango de $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$ es siempre un subconjunto del rango de $\boldsymbol{f}$.
La composición de funciones no cumple con la propiedad conmutativa.

Simbólicamente:

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Ejercicios:

1.- **Dadas las funciones**

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **y** $\boldsymbol{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x \rightarrow y = x + 5}$ $\boldsymbol{x \rightarrow y = -x + 1}$

Calcular $(f \circ g)(x)$.

Solución:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$(f \circ g)(x) = f(-x + 1)$
$(f \circ g)(x) = -x + 1 + 5$
$(f \circ g)(x) = -x + 6$

2.- **Dadas las funciones**

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **y** $\boldsymbol{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x \rightarrow y = x + 5}$ $\boldsymbol{x \rightarrow y = -x + 1}$

Calcular $(g \circ f)(x)$.

Solución:

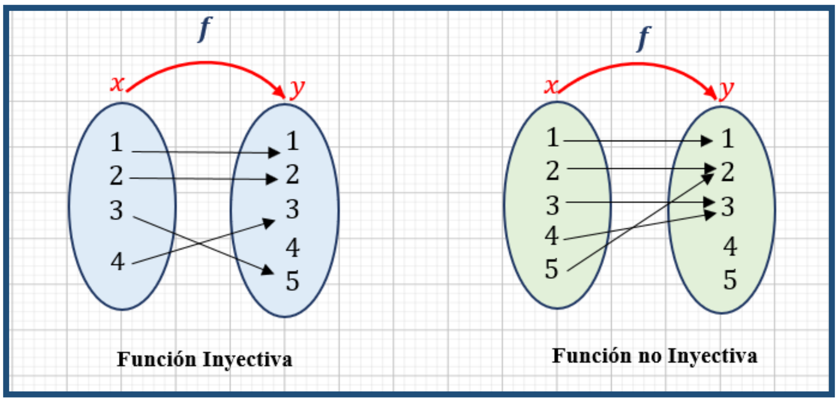
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$(g \circ f)(x) = g(x + 5)$
$(g \circ f)(x) = -(x + 5) + 1$
$(g \circ f)(x) = -x - 5 + 1$
$(g \circ f)(x) = -x - 4$

Con el ejemplo 1 y 2 se puede verificar que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$, lo que muestra que la composición de funciones no es una operación conmutativa.

Función Inyectiva

ıa función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ **es inyectiva si** a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde como máximo un elemento del conjunto de salida.

- Virtual



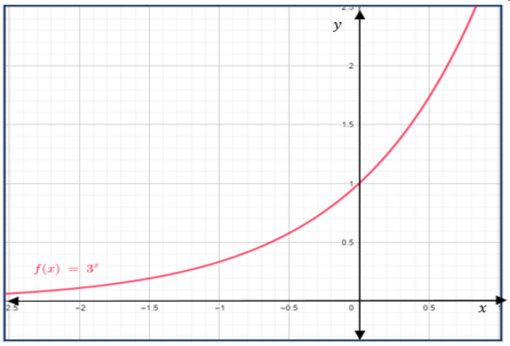
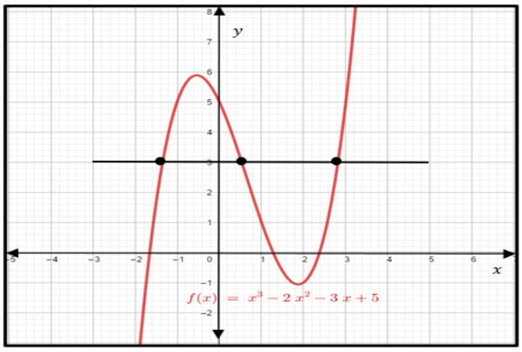
Descripción: Diagrama sagital Función inyectiva y no inyectiva
Fuente: Pachacama, M (2023).

Condición:

Una función f es inyectiva si para todo $f(x_1) = f(x_2)$ *implica que* $x_1 = x_2$.

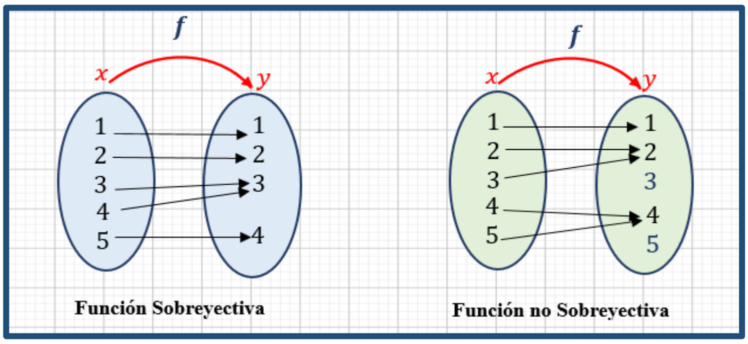
Gráficamente se determina si una función es **Inyectiva** cuando al trazar una recta paralela al eje de las x, ésta corta al gráfico de f en un solo punto.

Ejemplos:

 **Descripción:** Gráfica función Inyectiva. **Fuente:** Pachacama, M (2023).	 **Descripción:** Gráfica función no Inyectiva. **Fuente:** Pachacama, M (2023).
La gráfica corresponde a una función **Inyectiva,** porque al trazar una recta paralela al eje x, esta corta en un solo punto a la gráfica.	La gráfica no corresponde a una función, **Inyectiva,** porque al trazar una recta paralela al eje x, esta corta en tres puntos a la gráfica.

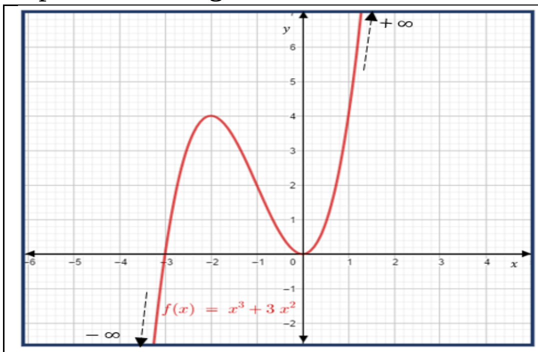
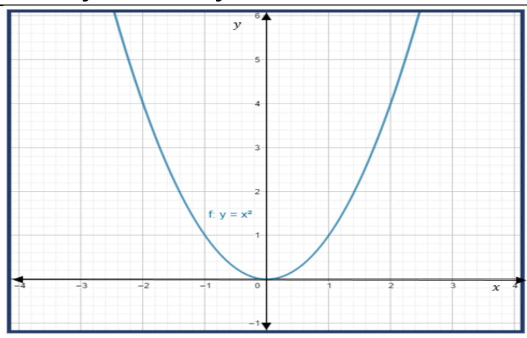
Función Sobreyectiva

Una función $f: A \to B$ **es** sobreyectiva cuando a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde por lo menos un elemento del conjunto de partida. Además, el rango de la función debe coincidir con el conjunto de llegada.



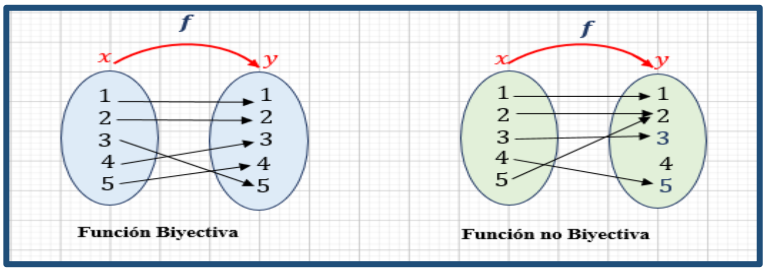
Descripción: Representación sagital función Sobreyectiva.
Fuente: Pachacama, M (2023).

Representación gráfica de una función sobreyectiva y no sobreyectiva

 **Descripción:** Gráfica función Sobreyectiva. **Fuente:** Pachacama, M (2023).	 **Descripción:** Gráfica función no Sobreyectiva. **Fuente:** Pachacama, M (2023).
Gráficamente se puede determinar si una función es sobreyectiva, porque la gráfica se expande en el eje de las y, al más infinito $(+\infty)$ y al menos infinito $(-\infty)$.	Gráficamente se puede determinar si una función **no** es sobreyectiva porque la gráfica no se expande en el eje de las y, al más infinito $(+\infty)$ y al menos infinito $(-\infty)$. En este caso únicamente se extiende al más infinito.

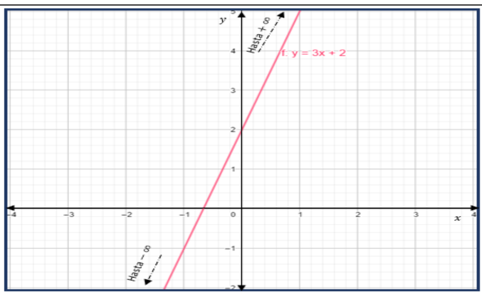
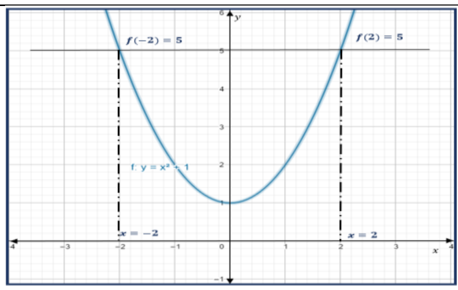
Función Biyectiva

Una función es biyectiva, si es inyectiva y sobreyectiva a la vez; es decir, si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada, y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida.



Descripción: Diagrama Sagital Función Biyectiva.
Fuente: Pachacama, M (2023).

Representación gráfica de una función biyectiva y no biyectiva

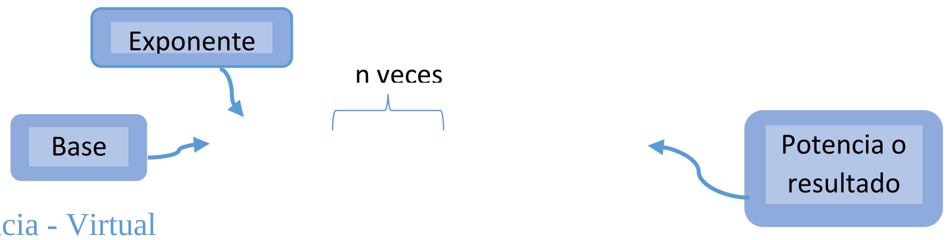
 **Descripción:** Gráfica función Biyectiva. **Fuente:** Universo Fórmulas (2022).	 **Descripción:** Gráfica función no Biyectiva. **Fuente:** Pachacama, M (2023).
La función es Inyectiva y Sobreyectiva, por lo tanto, cumple la condición para ser Biyectiva.	La función no es Inyectiva ni tampoco es Sobreyectiva, por lo tanto, la función no puede ser Biyectiva.

"Función Exponencial"

Potenciación

Definición:

La potenciación es la multiplicación de un número por sí mismo repetidas veces. El número que vamos a multiplicar se llama base; la cantidad de veces que lo vamos a multiplicar lo define el número que se llama exponente.



$$a^n = a.a.a \dots \dots a = b$$

Ejemplo:

2 veces

$= 3.3 = 9$

Se lee: tres elevado al cuadrado es igual a 9

5 veces

$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$

Se lee: dos elevado a la quinta es igual a 32

Propiedades de la potenciación

mbre	opiedad	plicación	emplo
tencia de exponente cero	$a^0 = 1$	alquier potencia de exponente 0 es igual a 1.	$x^0 = 1$
tencia de exponente 1	$a^1 = a$	alquier potencia de exponente 1 es el mismo número.	$x^1 = x$
oducto de potencias con la misma base	$a^n.a^m = a^{n+m}$	el producto de potencias de la misma base se conserva la base y se suman los exponentes	$x^2.x^5 = x^7$
visión de potencias de la misma base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	el cociente de potencias de la misma base se mantiene la base y se restan los exponentes.	$\frac{x^9}{x^4} = x^{9-4} = x^5$ $\frac{x^7}{x^{(-2)}} = x^{7-(-2)}$ $= x^{7+2} = x^9$
tencia de una potencia	$(a^n)^m = a^{n.m}$	antenemos la base y multiplicamos los exponentes.	$(x^5)^2 = x^{10}$
tencia de varios factores	$(a.b)^n = a^n.b^n$	da factor se eleva al exponente indicado.	$(x.y)^3 = x^3.y^3$
stributiva con respecto a la división	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	videndo y divisor quedan elevados al exponente indicado.	$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$
tencia de exponente negativo	$(a)^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$	invierte la base y se cambia el signo del exponente.	$(6)^{-2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1^2}{6^2}$ $= \frac{1}{36}$

tencia de exponente negativo	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$	invierte la base y se cambia el signo del exponente	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$
tencia de exponente racional	$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$	potencia de exponente racional es igual a la raíz, donde el denominador es el índice y el numerador es el exponente del radicando.	$3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

Descripción: Propiedades de Potenciación
Elaborado por: Flores, J. (2023)

1) **Regla de signos**

ASO	ASE	XPONENTE	OTENCIA	EMPLO
1°	**sitiva (+)**	**imero par**	**sitiva (+)**	$(+\mathbf{3})^{\mathbf{2}} = +$
2°	**sitiva (+)**	**imero impar**	**sitiva (+)**	$(+\mathbf{5})^{\mathbf{3}} = +$
3°	**gativa (-)**	**imero par**	**gativa (-)**	$(-\mathbf{4})^{\mathbf{2}} = +$
4°	**gativa (-)**	**imero impar**	**gativa (-)**	$(-\mathbf{7})^{\mathbf{3}} = -$

Descripción: Regla de signos
Elaborado por: Flores, J. (2023)

Ecuación Exponencial

Definición

Una **Ecuación Exponencial** es aquella ecuación en la que la **incógnita** aparece únicamente en el **exponente**.

Por ejemplo, las ecuaciones son:

Exponenciales	No exponenciales
$2^{x+7} - 9 = 0$	$2^x = x$
$5^x = 2$	$x.3^x = x$

1) **Propiedades de ecuaciones exponenciales**

Potencias de igual base :	$a^x = a^y \Rightarrow x = y$
Potencias de igual exponente :	$a^x = b^x \Rightarrow a = b$

Descripción: Propiedades de ecuaciones exponenciales
Elaborado por: Lara, V. (2023)

2) **Resolución de ecuaciones exponenciales mediante la reducción a una base común**

Si ambos miembros de una ecuación se pueden expresar como potencias de base a, de la igualdad de las potencias y de las bases se deduce que los exponentes deben ser iguales. Igualando exponentes obtendremos una ecuación cuya resolución será fácil.

Ejercicios resueltos:

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales.

Ejemplo 1. $3^{(x-1)(x+2)} = 81$

Afirmaciones	Razones
$3^{(x-1)(x+2)} = 81$ $3^{(x-1)(x+2)} = 3^4$ $(x-1)(x+2) = 4$ $x^2 + x - 2 = 4$ $x^2 + x - 6 = 0$ $(x+3)(x-2) = 0$ $x + 3 = 0\,, x - 2 = 0$ $x = -3\,,\; x = 2$	Expresar 81 en base 3. $81 = 3^4$ Se tiene una igualdad de potencias de igual base, por tanto, se igualan los exponentes. Resolvemos la expresión algebraica. Factorizamos Igualamos cada factor a cero y despejamos la incógnita para obtener las soluciones.

Función Exponencial

Podemos definir la función:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to f(x) = a^x, \textbf{ donde a} \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$

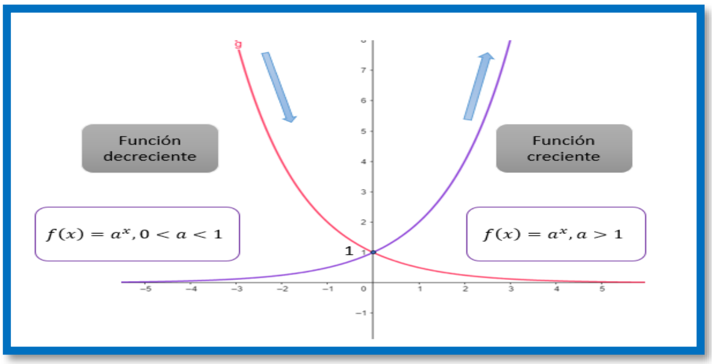
Llamamos función exponencial a **f(x) = a^x** cuando la variable independiente x aparece en el **exponente** y tiene de base una **constante** a.

Características de la función exponencial

- Toda función exponencial de la forma: **f(x) = a^x**
- Si a = 0 y x ≠ **0** constituye una asíntota horizontal y =**0**
- Su dominio son los reales ***Dom*** **f(x)** = $\mathbb{R}$
- Su rango son los reales positivos ***Ran*** **f(x)** = (**0**, +∞)
- Si la base es mayor que 1, $a > 1$, la función es creciente.

- Si la base es menor que 1 y mayor que 0, $0 < a < 1$, la función es decreciente.

Una función exponencial puede ser creciente y decreciente:



Descripción: Función exponencial creciente y decreciente
Fuente: Flores, J. (2023)

Ejercicios resueltos:
Ejemplo 1. Graficar la función exponencial

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$\boldsymbol{x} \to f(x) = 2^x$$

Halle el dominio, rango y determine si es creciente o decreciente.

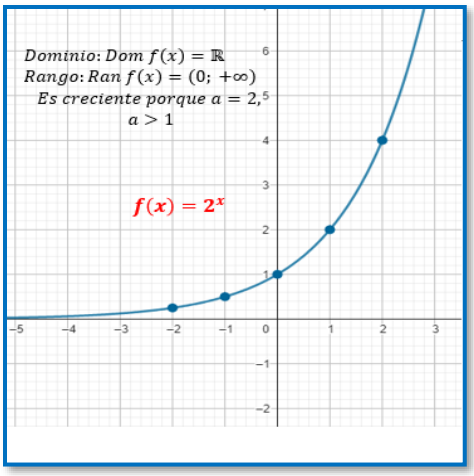
Solución:

Como $a = 2$, el gráfico de f es creciente y su asíntota es el eje x.

Una tabla de valores de esta función es la siguiente:

x	f(x)
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4

Descripción: Tabla de valores de la función: y= 2^x
Elaborado por: Flores, J. (2023)



Descripción: Gráfica de la función: y= 2^x
Elaborado por: Flores, J. (2023)

Ejemplo 2. Graficar la función exponencial

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

$$\boldsymbol{x} \to f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Halle el dominio, rango y determine si es creciente o decreciente.

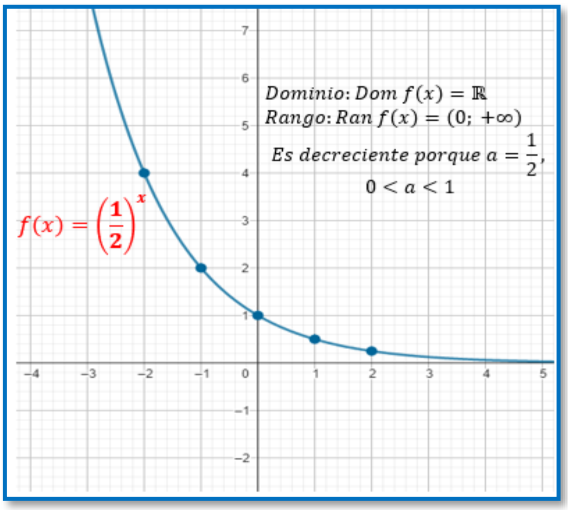
Solución:

Como $a = \frac{1}{2}$, el gráfico de f es decreciente y su asíntota es el eje x.

Una tabla de valores de esta función es la siguiente:

x	f(x)
-2	4
-1	2
0	1
1	0.5
2	0.25

Descripción: Tabla de valores de la función: y= $\left(\frac{1}{2}\right)^x$
Elaborado por: Flores, J. (2023)



Descripción: Gráfica de la función: y= $\left(\frac{1}{2}\right)^x$
Elaborado por: Flores, J. (2023)

Función Logarítmica

Introducción:

Otra función trascendente, es la denominada función logarítmica. Hoy en día, los computadores y las calculadoras han tomado el rol de los cálculos logarítmicos, pero todavía esta teoría de los logaritmos es muy relevante cuando se trata de las matemáticas puras y sus aplicaciones en los estudios de las ciencias naturales.

Las **funciones exponenciales** se relacionan con las **funciones logarítmicas**. Hemos estado calculando el resultado de a^b y esto nos daba funciones exponenciales. Un **logaritmo** es un cálculo del **exponente** en la ecuación $x = a^b$. Puesto de otro modo, encontrar un logaritmo es lo mismo que encontrar el exponente cuya base debe elevarse para obtener el valor deseado.

Napier fue un hacendado escocés, para quien las matemáticas eran un pasatiempo. Se lo conoce principalmente como el inventor de los logaritmos. Publicó su trabajo en 1614 bajo el título "Una descripción de la regla maravillosa de los logaritmos". La palabra logaritmos proviene de la palabra griega compuesta por **logos** que significa relación y **arithmos** que significa número.

Para iniciar la aplicación de la función logarítmica, primero veremos que es logaritmo, notación exponencial y logarítmica, ecuaciones logarítmicas, definición. propiedades y ejercicios.

Logaritmo:

Definición:

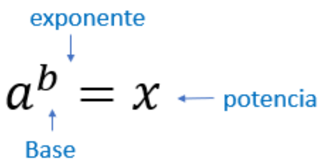
Logaritmo de un número es el exponente al que debemos elevar la base para obtener ese número.

Dados dos números $a, x \in \mathbb{R}$ siendo $x > 0$, $x \neq 1$ definimos el logaritmo de x con base a, denotado por $\log_a x$ como:

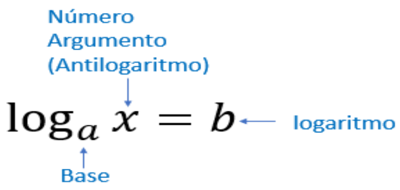
$$\log_a x = b \leftrightarrow a^b = x, a > 0, a \neq 1$$

En con conclusión, el logaritmo es sólo otra forma de expresar la potenciación de un número, pero en este caso lo que se busca es el exponente de la base Tengamos en cuenta que la notación exponencial determina la notación logarítmica. Así:

Notación exponencial



Notación logarítmica



Ejemplo:

Notación exponencial	Notación logarítmica
$2^5 = 32$	$\log_2 32 = 5$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} 1000 = 3$
$3^4 = 81$	$\log_3 81 = 4$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$	$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$
$5^{-2} = 0{,}04$	$\log_5 0{,}04 = -2$

Consecuencias de la definición de logaritmo

- No existen logaritmos de bases negativas o del cero.

- El logaritmo es negativo si la base a es mayor que 1 $(a > 1)$ y el antilogaritmo es mayor que cero y menor que 1.

  Ejemplo: $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, pues $3^{-2} = \frac{1}{9}$

- El logaritmo es positivo si la base a es menor que 1 $(a < 1)$ y el antilogaritmo es mayor que cero y menor que 1.

  Ejemplo: $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$, pues $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
- El logaritmo es positivo si la base a y el antilogaritmo es mayor que 1.

  Ejemplo: $\log_3 9 = 2$, pues $3^2 = 9$
- El logaritmo es negativo si la base a es menor que 1 $(a < 1)$ y el antilogaritmo es mayor que 1.
- Ejemplo: $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, pues $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos presentan una serie de propiedades que podemos deducir a partir de su definición.

Propiedad	Ejemplo
Logaritmo de la Unidad $\log_a 1 = 0$	$\log_2 1 = 0$
Logaritmo de un número igual a la base $\log_a a = 1$	$\log_3 3 = 1$
Logaritmo de un producto $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$	$\log_2(4.8) = \log_2 4 + \log_2 8$ $\log_2(4.8) = 2 + 3$ $\log_2(4.8) = 5$
Logaritmo de un cociente $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	$\log_2\left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 8 - \log_2 4$ $\log_2\left(\frac{8}{4}\right) = 3 - 2$ $\log_2\left(\frac{8}{4}\right) = 1$
Logaritmo de una potencia $\log_a(x^n) = n\log_a x$	$\log_2(8^4) = 4\log_2 8$ $\log_2(8^4) = (4)(3)$ $\log_2(8^4) = 12$
Logaritmo de una raíz $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \log_a(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\log_a x$	$\log_2(\sqrt[4]{8}) = \log_2\left(8^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\log_2 8$

	$\log_2(\sqrt[4]{8}) = \left(\frac{1}{4}\right)(3)$ $\log_2(\sqrt[4]{8}) = \frac{3}{4}$
Cambio de base $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$ $\log_4 8 = \frac{3}{2}$

Función logaritmo Natural

Si la base de una función logarítmica es el número e, entonces tenemos la función logaritmo natural. Esta función se representa con tal frecuencia que tiene asignado un símbolo especial, ln $(del\ latín, logarithmus\ naturalis)$

Notación:

$$\ln(x), \qquad para\ \log_e(x)$$

Función logaritmo en base 10 o logaritmo decimal

Cuando no se especifica base alguna, debemos suponer que la función logarítmica tiene base 10. A estos logaritmos se los conoce como comunes, ya que era frecuente utilizarlos para propósitos de cómputos, antes de la época de calculadoras.

Notación:

$$\log(x), \qquad para\ \log_{10}(x)$$

Resolver los siguientes logaritmos

- $\mathbf{\log_2 32 + \log_3 81 + \log_7 49} = 5 + 4 + 2$
  $= 11$
- $\mathbf{\log_2 8} = 3$
- $\mathbf{\log_{10} 10} = 1$
- $\mathbf{\log_{17} 1} = 0$
- $\mathbf{5\log_2 2 + 7\log_3 27 - 2\log_5 25}$
  $= 5(1) + 7(3) - 2(2)$
  $= 5 + 21 - 4$
  $= 22$
- $\mathbf{\log_2\left(\frac{1}{16}\right)} = \log_2\left(\frac{1}{2^4}\right)$

$$= \log_2(2^{-4})$$
$$= -4$$

Ecuación Logarítmica

Definición

Una **Ecuación Logarítmica** es aquella en la que involucra al logaritmo en uno o en los dos lados de la igualdad y la variable o **incógnita** aparece en el **argumento** del logaritmo.

Para resolver ecuaciones logarítmicas se aplican las propiedades de los logaritmos de forma tal que puedan llegarse a una expresión con logaritmos de la misma base. Una vez conseguido, se aplica la equivalencia: $log_a A = \log_a B \leftrightarrow A = B$

Deduciendo, a partir de aquí, los valores de las incógnitas

Ejercicios resueltos:

Ejemplo 1. $\log x = 2$

EJERCICIO	PROPIEDADES DE LOS LOGARÍTMOS
$\log x = 2$	
$10^2 = x$	Definición de logaritmo
$100 = x$	Resolvemos la potencia
$x = 100$	Axioma Simétrico $a = b \rightarrow b = a$

Ejemplo 4. $\log_5(2x - 23) = \log_5(x - 5)$

EJERCICIO	SOLUCIÓN
1. $\log_5(2x - 23) = \log_5(x - 5)$ 2. $2x - 23 = x - 5$ 3. $2x - x = 23 - 5$ 4. $x = 18$	1. Se aplica la equivalencia del logaritmo $log_a A = \log_a B \leftrightarrow A = B$ Y se procede a eliminar los logaritmos 2. Transposición de términos y suma algebraica de enteros

Ejemplo 3. $\log_4(x + 5) + \log_4 2 = \log_4(5x - 3)$

EJERCICIO	RESOLUCIÓN
1. $\log_4(x + 5) + \log_4 2 = \log_4(5x - 3)$ 2. $\log_4(x + 5)(2) = \log_4(5x - 3)$	1. Logaritmo de una suma 2. Se aplica la equivalencia del logaritmo

3. $(x+5)(2) = (5x-3)$ 4. $2x + 10 = 5x - 3$ 5. $2x - 5x = -3 - 10$ (-1) $-3x = -13$ (-1) 6. $3x = 13$ 7. $x = \frac{13}{3}$	$log_a A = \log_a B \leftrightarrow A = B$ 3. Propiedad distributiva 4. Transposición de términos 5. Suma algebraica de enteros 6. Cambio de signo en ambos miembros multiplicando por (-1) 7. Se despeja la variable "x"

Función Logarítmica

Sea $a > 0$; $a \neq 1$. La función logarítmica es base a; que se nota por log_a es la función inversa de la función exponencial; es decir:

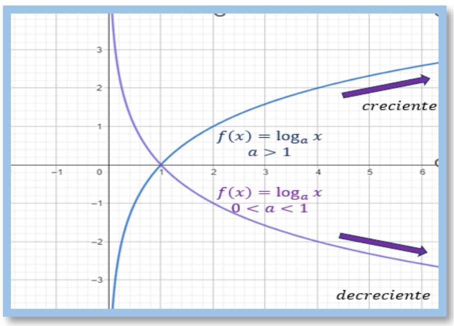
$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x) = \log_a x$$

Características de la función logarítmica

- Toda función logarítmica es de la forma: f(x) = $\log_a x$
- **Si a=0 y y≠0** constituye una **asíntota vertical**, es decir, ***x*=0**
- Su dominio son los reales positivos ***Dom f(x)* = (0, +∞)**
- Su rango son los reales ***Ran f(x)* = *R***
- La función logarítmica es la inversa de la función exponencial, dado que:
$$\log_a x = b \leftrightarrow a^b = x$$
- Si la base es mayor que 1, $a > 1$, la función es creciente.
- Si la base es menor que 1 y mayor que 0, $0 < a < 1$, la función es decreciente.
- La base de un logaritmo no puede ser negativo.

La función logarítmica puede ser creciente o decreciente:



Descripción: Función logarítmica creciente y decreciente
Fuente: Flores, J. (2023)

Ejercicios resueltos:

Ejemplo 1. **Graficar la función logarítmica**

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \log_2 x$$

Halle el dominio, rango y determine si es creciente o decreciente

Solución:

Como $a = 2$, el gráfico de f es creciente y su asíntota es el eje y.

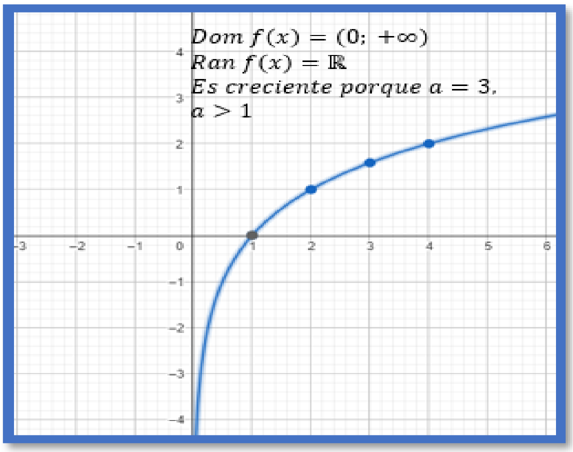
Una tabla de valores de esta función es la siguiente:

Tabla de valores

x	f(x)
0	-∞
1	0
2	1
3	1.584962500...
4	2

Descripción: Gráfica de la función: f(x) = $\log_2$ x
Elaborado por: Flores, J. (2023)

Gráfica de la función $f(x) = \log_2 x$



Descripción: Gráfica de la función: f(x) = $\log_2$ x
Elaborado por: Flores, J. (2023)

Ejemplo 2. **Graficar la función logarítmica**

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

Halle el dominio, rango y determine si es creciente o decreciente

Solución:

Como $a = \frac{1}{4}$, el gráfico de f es decreciente y su asíntota es el eje y.

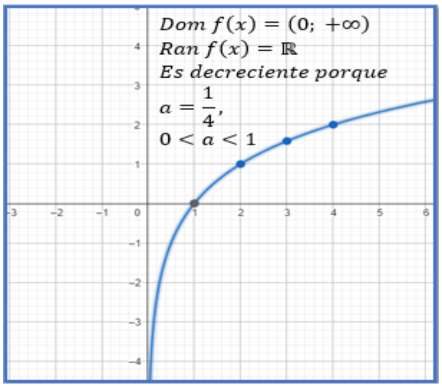
Una tabla de valores de esta función es la siguiente:

Tabla de valores **Gráfica de la función $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$**

x	f(x)
0	∞
1	0
2	-0.5
3	-0.792481250...
4	-1

Descripción: Gráfica de la función: f(x) = $\boldsymbol{\log_{\frac{1}{4}} x}$

Elaborado por: Flores, J. (2023)



Descripción: Gráfica de la función: f(x) = $\boldsymbol{\log_{\frac{1}{4}} x}$

Elaborado por: Flores, J. (2023)

"Función por Partes"

Introducción

Todas las funciones que analizamos están definidas a través de una sola ley. Muchas veces, la regla que define una función está dada por más de una expresión matemática. Cuando las funciones están definidas por más de una ley, es decir, por distintas expresiones en distintas partes de su dominio, decimos que es una función definida por tramos.

Función por partes

Una función por partes o a tramos, es una función $\boldsymbol{f}$*, en la cual su dominio se puede dividir en diferentes partes y en cada una de esas partes la función está definida con una fórmula o expresión diferente.*

Así, la función dada por:

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -x-2, & si\ x \leq -1 \\ 2, & si -1 < x < 2 \\ x+1, & si\ x > 2 \end{cases}$	$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ $= \begin{cases} -x-2, & si\ x \in (-\infty, -1] \\ 2, & si\ x \in (-1, 2) \\ x+1, & si\ x \in (2, +\infty) \end{cases}$

Para trazar su gráfica bastará con construir cada función en un mismo plano cartesiano, pero solamente la parte correspondiente a la restricción indicada.

En este tipo de funciones el dominio y el rango serán analizados a partir del gráfico por las restricciones que presenta.

Para calcular la imagen de un elemento $\boldsymbol{x}$ observamos a qué intervalo pertenece y los sustituimos en la expresión analítica correspondiente a cada intervalo.

Solución.

La función está definida en tres partes.

Primera parte:

Primera parte: Sustituir en $f(x) = -x - 2$, si $x \in (-\infty, -1]$ $x = -1$ $f(-1) = -(-1) - 2$ $f(-1) = 1 - 2$ $f(-1) = -1$	Sustituir en $f(x) = -x - 2$, si $x \in (-\infty, -1]$ $x = -4$ $f(-4) = -(-4) - 2$ $f(-4) = 4 - 2$ $f(-4) = 2$

Tercera parte:

Sustituir en $f(x) = x + 1$, si $x \in (2, +\infty)$

Para:

Si $x = 2$

$f(2) = 2 + 1$

$f(2) = 3$

Si $x = 4$

$f(4) = 4 + 1$

$f(4) = 5$

Gráfica:

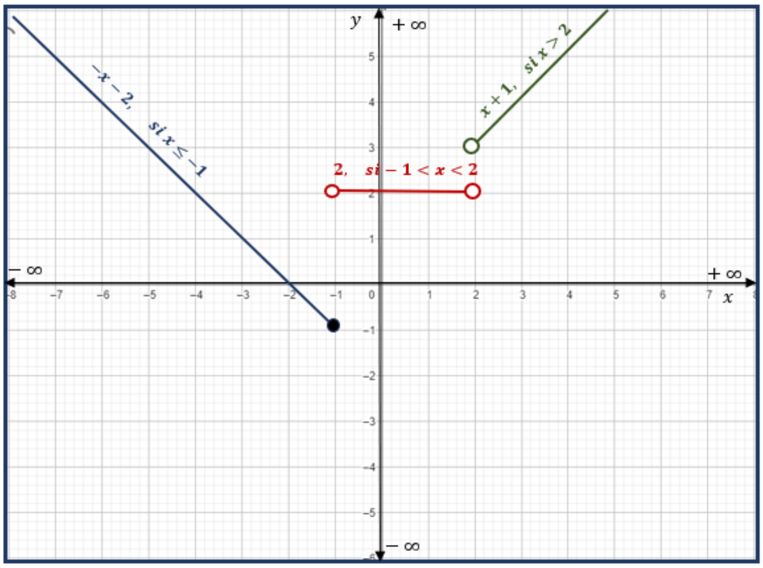
Tablas de valores

Primera parte

$-x-2$	
x	y
-1	-1
4	2

Tercera parte

$x+1$	
x	y
2	3
4	5



Descripción: Función por partes
Elaborado por: Pachacama, M. (2023)

Dominio

Puesto que las expresiones que definen cada uno de los tramos tienen sentido para cualquier número real, el dominio está formado por la unión de los intervalos dados en la definición de la función.

Dom f(x) = $(-\infty, -1] \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$

Rango o recorrido

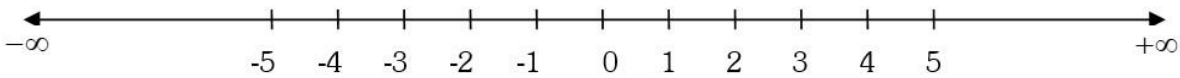
Al observar la gráfica de la función se puede observar que su rango o recorrido es:

Ran f(x) = $[-1, +\infty)$.

Intervalos

Los intervalos son un conjunto de números reales. Por ejemplo el intervalo [-5,3] describe el conjunto de números reales que se encuentran entre -5 y 3. {-5,... -4,99... ,..., -4,9 ,........., 2,9... , 2,99... , 3}

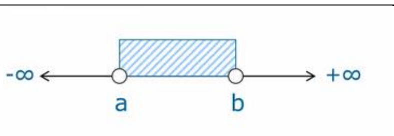
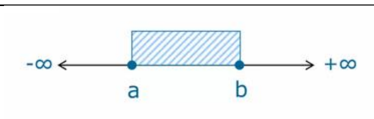
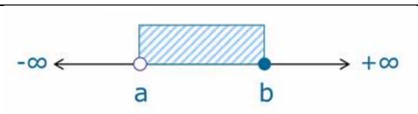
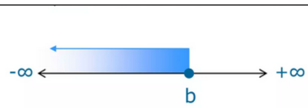
Para el mejor entendimiento necesitamos saber que la familia de los números reales está compuesta por infinitos valores, de valor a valor sin importar cuan cercanos estén. La representación gráfica de los números reales es mediante una recta de representación numérica.



- Se trabaja con números reales.

- Entre dos números reales diferentes existen infinitos valores reales.

Tipos de intervalos

INTERVALOS	Definición	**Representación Gráfica:**	**Solución en intervalo:**
Intervalo abierto	Incluye a todos los números reales comprendidos entre **a** y b, sin incluir a "**a**" ni a "**b**"		(a, b) ó]a, b[
Intervalo cerrado	Incluye a todos los números reales comprendidos entre **a** y **b**, incluyendo a "**a**" y "**b**		[a, b]
Intervalo semi- abierto o semi-cerrado	Incluye a todos los números reales comprendidos entre a y b, incluyendo a "a" pero no a "b"		[a,b)
	Incluye a todos los números reales comprendidos entre a y b, no incluyendo a "a" pero si a "b"		(a,b]
Intervalos indeterminados	Incluye a todos los valores mayores o iguales que "a"		[a, +∞)
	Incluye a todos los valores menores o iguales que "b"		(-∞, b]

Inecuación

Una inecuación es la desigualdad existente entre dos expresiones algebraicas, conectadas a través de los signos: mayor que >, menor que <, menor o igual que ≤, y mayor o igual que ≥, en la que figuran uno o varios valores desconocidos llamadas incógnitas, además de ciertos datos conocidos.

Nota: cuando se multiplica a toda la inecuación por (-1), también cambia el signo de la desigualdad, es decir cambia de $< \ a \ >, \leq \ a \ \geq$

Ejemplos:

1. $2x - 9 < -14$
2. $54x \geq 12y - 21$
3. $13x - 51 + 65x \leq 74 - 24x$

- ✓ Las inecuaciones lineales son aquellas en la que la variable (x) tiene como exponente 1
- ✓ La **solución** de una inecuación es el **conjunto de valores de la variable que verifica la inecuación**.
- ✓ Podemos expresar la solución de la inecuación mediante una **representación gráfica** o **un intervalo**

Ejercicios

1. Resolver la inecuación $2x - 1 < 7$

2x -1 < 7	Dato
2x < 1+7	El 1 pasa al otro lado con la operación contraria
x < 8/2	El 2 está multiplicando pasa a dividir
x < 4	Solución

Representación gráfica:

Solución en intervalo: (-∞, 4)

2. Hallar el intervalo solución de – 8x + 4 ≤ 5x + 12

Organizar términos, variables en la izquierda y números a la derecha.

Reducción de términos semejantes

Multiplicamos en ambos lados por (-1) y cambiamos el signo de a desigualdad a ≥

$-8x - 5x \leq 12 - 4$

$-13x \leq 8$
$(-1) - 13x \geq 8\,(-1)$

$13x \geq -8$
$x \geq -\frac{8}{13}$

Por lo tanto, el intervalo solución es $\left[-\frac{8}{13}, +\infty\right)$

Solución gráfica de una inecuación

Las desigualdades lineales pueden graficarse en un plano de coordenadas. Las soluciones de una desigualdad lineal son una región del plano coordenado. Una **recta límite**, que es la ecuación lineal relacionada, sirve como frontera para la región. Puedes usar una representación visual para encontrar los valores que hacen válida a la desigualdad y también los que la hacen inválida.

Para graficar una inecuación lineal debemos seguir los siguientes pasos:

Ejemplo1: Graficar la siguiente inecuación: $\boldsymbol{2x - y < 4}$

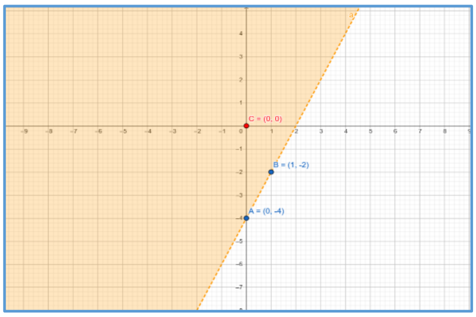
1. **Transformamos** la desigualdad **en igualdad**.

$$2x - y = 4$$

2. Damos dos valores a una de las dos variables con los que obtenemos dos puntos para graficar.

$\boldsymbol{2x - y = 4}$	
$\boldsymbol{x = 0}$	$\boldsymbol{x = 1}$
$0) - y = 4$ $- y = 4$ $y = 4$ $= -4$	$2(1) - y = 4$ $2 - y = 4$ $-y = 4 - 2$ $-y = 2$ $y = -2$

3. Los puntos de color azul son los que se obtuvo A(0,-4) y B(1,-2)



Descripción: Gráfica de la inecuación 2x - y < 4
Elaborado por: Parra, F (2023).

4. Graficamos la recta en el plano cartesiano con los puntos obtenidos, extendemos la recta.
Punto de prueba: puntos de color rojo

P(0,0)
2(0) – (0) < 4
0 – 0 < 4
0 < 4 **Verdadero**

5. Debemos pintar o sombrear la parte izquierda de la recta porque a ese lado el punto de prueba salió verdadero.

6. La recta va entrecortada por que el símbolo de la inecuación es menor no incluye el signo igual, esto quiere decir que los puntos que pertenecen a la recta **No son parte de la solución.**

7.

8. Graficamos la recta en el plano cartesiano con los puntos obtenidos, extendemos la recta.
Punto de prueba: puntos de color rojo

P(0,0)
2(0) – (0) < 4
0 – 0 < 4
0 < 4 **Verdadero**

9. Debemos pintar o sombrear la parte izquierda de la recta porque a ese lado el punto de prueba salió verdadero.

10. La recta va entrecortada por que el símbolo de la inecuación es menor no incluye el signo igual, esto quiere decir que los puntos que pertenecen a la recta **No son parte de la solución.**

Inecuación Cuadrática

Las **inecuaciones de segundo grado**, o **inecuaciones cuadráticas**, son desigualdades algebraicas en las que incógnita está elevada al cuadrado (el exponente de la variable x es 2).

La solución de una inecuación de segundo grado es un intervalo de números, a diferencia de las ecuaciones de segundo grado que únicamente tienen dos soluciones (como máximo).

Por ejemplo, la siguiente expresión algebraica es una inecuación de segundo grado, porque en lugar del signo igual tiene el signo de una desigualdad (≥) y, además, la incógnita aparece una vez elevada al cuadrado:

$$5x^2 - 7x + 12 \geq 0$$

Resolución de una inecuación de segundo grado (o cuadrática)

Para resolver una inecuación de segundo grado (o cuadrática) se deben hacer los siguientes pasos:

1. **Operar con los términos** de la inecuación hasta obtener solamente un término cuadrático (x^2), un término lineal (5x), y un término independiente (8).
2. **Factorizar o aplicar la fórmula general de la ecuación de segundo grado** para hallar dos valores.

   Nota: se debe usar la fórmula general cuando no se pueda factorizar.

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ **Fórmula cuadrática**

3. Dividir la recta numérica con los valores calculados en el paso 2. Se obtendrán tres tramos.
4. **Evaluar un valor de cada tramo** en la inecuación de segundo grado.
5. La solución de la inecuación de segundo grado son **los tramos que cumplen con la desigualdad.**

Ejemplos

Ejemplo 1. Resolver la siguiente inecuación

$x^2 - 6x + 8 > 0$

$(x - 4)(x - 2) > 0$

Puntos críticos

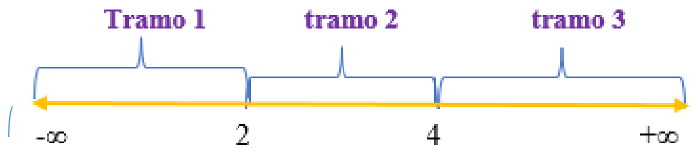
$x - 4 = 0$

$x = 4$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

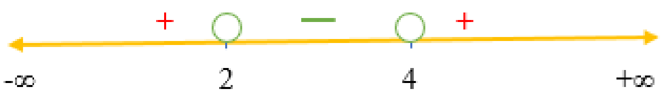
Estos valores $x = 2, x = 4$ **ubicamos en la recta numérica para luego evaluar.**



Obtenemos 3 tramos, evaluamos en cada tramo para ver el signo, el valor de x reemplazamos en la ecuación original.

Tramo 1: $(-\infty,2)$	tramo 2:$(2,4)$	tramo 3:$(4,+\infty)$
$x = -4$	$x = 3$	$x = 10$
$x^2 - 6x + 8 > 0$	$x^2 - 6x + 8 > 0$	$x^2 - 6x + 8 > 0$
$(-4)^2 - 6(-4) + 8 > 0$	$(3)^2 - 6(3) + 8 > 0$	$(10)^2 - 6(10) + 8 > 0$
$16 + 24 + 8 > 0$	$9 - 18 + 8 > 0$	$100 - 60 + 8 > 0$
48 (+)	-1 (-)	48 (+)

Ubicamos los signos en cada tramo



Como el signo de la inecuación es "**mayor que**" se coge los tramos positivos, el intervalo es abierto, en este caso hay dos tramos, por lo tanto, la solución es:

$$\boldsymbol{x \in (-\infty, 2)\ U\ (4, +\infty)}$$

Ejemplo 2: Hallar la solución de la siguiente inecuación

$x^2 + 8x + 1 \leq 2x - 4$

$x^2 + 8x + 1 - 2x + 4 \leq 0$

$x^2 + 6x + 5 \leq 0$,

Usamos la fórmula general para hallar los puntos críticos:

a = 1, b = 6, c = 5

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2}}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2}}$$

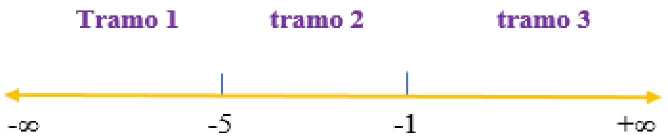
$$\boldsymbol{x = \frac{-6 \pm 4}{2}}$$

$$x_1 = \frac{-6+4}{2}, x_2 = \frac{-6-4}{2}$$

$$x_1 = -\frac{2}{2}, x_2 = -\frac{10}{2}$$

$x_1 = -1$, $x_2 = -5$

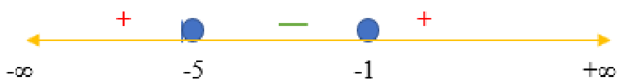
Estos valores x = -1, x = -5 ubicamos en la recta numérica para luego evaluar.



Obtenemos 3 tramos, evaluamos en cada tramo para ver el signo, el valor de x reemplazamos en la ecuación original.

Tramo 1: (-∞,-5)	tramo 2:(-5,-1)	tramo 3:(-1,+∞)
$x = -10$	$x = -3$	$x = 5$
$x^2 + 6x + 5 \leq 0$	$x^2 + 6x + 5 \leq 0$	$x^2 + 6x + 5 \leq 0$
$(-10)^2 + 6(-10) + 5 \leq 0$	$(-3)^2 + 6(-3) + 5 \leq 0$	$(5)^2 + 6(5) + 5 \leq 0$
$100 - 60 + 5 \leq 0$	$9 - 18 + 5 \leq 0$	$25 + 30 + 5 \leq 0$
45 (+)	-4 (-)	60 (+)

Ubicamos los signos en cada tramo



Como el signo de la inecuación es "**menor o igual que**" se coge el tramo negativo, el intervalo es cerrado, en este caso hay un tramo, por lo tanto la solución es:

$x \in [-5,-1]$

Inecuación Racional

Una inecuación racional es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas que tienen una sola incógnita (x), la cual APARECE en el DENOMINADOR. El numerador y el denominador puede ser una expresión lineal o cuadrática.

La inecuación racional puede ser de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0\ ;\ \frac{P(x)}{Q(x)} < 0\ \ ;\ \ \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ o } \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

Ejemplo:

a) $\frac{1}{x} \leq 1$ b) $\frac{2}{x-1} > 2$ c) $\frac{x^2}{x^2-5x+6} \geq 0$

Resolución de una inecuación racional

Resolver una *inecuación racional* en una variable, significa encontrar el conjunto de números reales (Intervalo) que satisface la desigualdad. Para ello, recurrimos a las propiedades básicas de las desigualdades.

Para resolver una inecuación racional se debe seguir los siguientes pasos:

1. Trasladar todos los términos al lado izquierdo de la inecuación, de tal manera que en el lado derecho quede únicamente 0.
2. Realizar las operaciones y simplificar
3. De ser posible factorizar el numerado y el denominador
4. Encontrar los puntos críticos para el denominador y el denominador. Para esto se debe igual a cero cada factor.
5. Ubicar los puntos críticos en la recta numérica.
6. Analizar el signo de cada factor en los diferentes intervalos de la recta numérica
7. Aplicar la ley de signos considerando todos los factores del numerador y denominador.
8. Escribir la respuesta

Ejemplos

Ejemplo 1. Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{2x-4}{x-2} \leq 8$$

> **Tomar en cuenta que:**
>
> **El denominador no puede pasar a multiplicar al otro lado de la inecuación, puesto que no sabemos el valor de la incógnita (x)**

1. **Cambiamos de lado el número que se encuentra al otro lado de la desigualdad, aplicamos propiedades de la desigualdad.**

$$\frac{2x-4}{x-2} - 8 \leq 0$$

2. **Encontramos MCM de**

$$\frac{2x-4-8(x-2)}{x-2} \leq 0$$

3. **Aplicamos propiedad distributiva de la multiplicación**

$$\frac{2x-4-8x+16}{x-2} \leq 0$$

4. **Operamos términos semejantes**

$$\frac{-6x+12}{x-2} \leq 0$$

5. **Multiplicamos por (- 1) el numerador, aplicamos propiedad de las desigualdades, cambia de sentido la desigualdad**

$$\frac{6x-12}{x-2} \geq 0$$

6. **Factorizamos numerador**

$$\frac{6(x-2)}{x-2} \geq 0$$

7. **Simplificamos términos semejantes**

$$\frac{6(x-2)}{x-2} \geq 0$$

Tomar en cuenta que el denominador no debe ser cero, para $x \neq 2$

$$6 \geq 0$$

Para todos los números reales $6 \geq 0$ **excepto 2**

8. **Solución**

$$\boldsymbol{x \in \mathbb{R} - \{2\}}$$

Ejemplo 2. Resolver la siguiente inecuación

$$\frac{x-2}{x-4} \geq 0$$

Tomar en cuenta que: **El denominador no puede pasar a multiplicar al otro lado de la inecuación, puesto que no sabemos el valor de la incógnita (*x*)**

Puntos críticos

Consiste en igualar a cero el numerador y denominador para encontrar el valor de *x*

Numerador $\boldsymbol{x-2}$	**Denominador** $\boldsymbol{x-4}$
Igualamos a cero	**El denominador debe ser diferente de cero (≠), puesto que no existe la división para cero**
$x - 2 = 0$ $x = 2$	$x - 4 \neq 0$ $x \neq 4$

Estos valores $x = 2, x = 4$

Nos ayudamos de la siguiente tabla:

	$-\infty$ a 2	2 a 4	4 a $+\infty$
$x-2$	-	+	+
$x-4$	-	-	+
$\frac{x-2}{x-4}$	**+**	**-**	**+**

Analizamos la inecuación: como el signo es "**mayor o igual que" cero,** se toma UNICAMENTE los tramos **positivos**, en este caso hay dos tramos, por lo tanto, la solución es:

Solución $\boldsymbol{x \in (-\infty, 2] \cup (4, +\infty)}$

Ejemplo 3: Hallar la solución de la siguiente inecuación

$$\frac{x^2+x-2}{x-4} \leq 0$$

Primero analizamos la inecuación y reducimos a su mina expresión:

1. **Factorizamos el numerador:** $\frac{x^2+x-2}{x-4} \leq 0$

   $$\frac{(x+2)(x-1)}{x-4} \leq 0$$

2. **Encontramos los puntos críticos**

Puntos críticos

Consiste en igualar a cero el numerador y denominador para encontrar el valor de x

Numerador $(\boldsymbol{x+2})(x-1)$	**Denominador** $\boldsymbol{x-4}$
Igualamos a cero	**Igualamos a cero**
$x+2=0$ $x=-2$	$x-4=0$ $x=4$
$x-1=0$ $x=1$	**El denominador debe ser diferente de cero ($\neq$), puesto que no existe la división para cero** **Entonces:**

	$x \neq 4$

Estos valores $x = -2, x = 1, x = 4$

Nos podemos ayudar de la siguiente tabla:

	$-\infty$ a -2	-2 a 1	1 a 4	4 a $+\infty$
$x+2$	-	+	+	+
$x-1$	-	-	+	+
$x-4$	-	-	-	+
$\frac{(x+2)(x-1)}{x-4}$	-	+	-	+

Analizamos la inecuación: como el signo es "**menor o igual que" cero,** se toma UNICAMENTE los tramos **negativos**, por lo tanto, la solución es:

$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x \in (-\infty, -2] \cup [1, 4)}$

Sistema de inecuaciones

Son sistemas de inecuaciones lineales en un conjunto de a lo menos dos inecuaciones lineales entre llaves. Un sistema de inecuaciones se dice que es **lineal**, si en ambos lados de cada inecuación aparece una expresión de primer grado, representados de la forma:

$$\text{Lineal} \longrightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases} \qquad \text{No lineal} \longrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y \leq 3 \\ x + y^3 \geq 1 \end{cases}$$

Los signos < pueden ser sustituidos por >, ≤ *o* ≥.

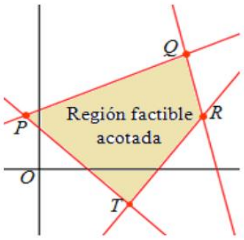
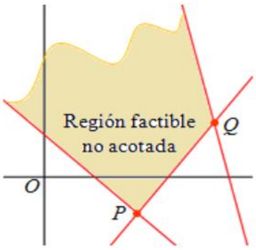
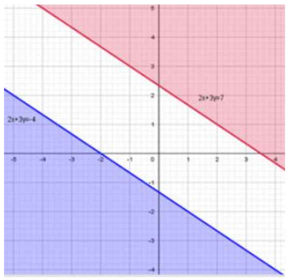
La solución de un sistema de inecuaciones es la intersección de las regiones que corresponden a la solución de cada inecuación (región factible).

Región factible de un sistema de inecuaciones

La solución de un sistema de inecuaciones es la intersección (donde se chocan todas las soluciones) de las regiones que corresponden a la solución de cada inecuación.

Tipos de región (solución) de un sistema de inecuaciones

Para hallar la región factible en un sistema de inecuaciones debemos conocer los tipos de soluciones que se nos pueden presentar.

Región Factible acotada	**Región factible no acotada**	**Región factible vacía**
Es cuando la región factible está formada por un polígono de lados menor o igual al número de desigualdades del sistema.  **Descripción:** Gráfica de una región factible acotada **Fuente:** Martínez (2013)	Es cuando la región factible es ilimitada es decir quedan abiertas por algún lado.  **Descripción:** Gráfica de una región factible no acotada **Fuente:** Martínez (2013)	Es cuando la región factible no tiene intersección  **Descripción:** Gráfica región factible vacía. **Fuente:** Geogebra

Ejemplo1. Hallar la región factible en el sistema de inecuaciones

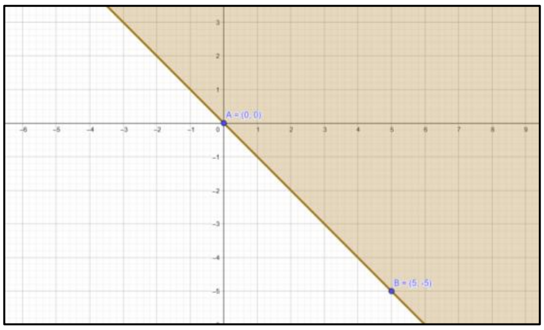
$$\begin{cases} y \geq -x \\ y < 2x + 5 \end{cases}$$

Debemos seguir los pasos para graficar una inecuación.

Empezamos con la primera inecuación: y ≥ - x

y = - x	transformarla a ecuación
x = 0 → y = 0	Damos cualquier valor a la variable (x)
x = 5 → y = -5	Encontramos los valores de y

A((0,0) ; B(5,-5)



Descripción: Gráfica de la inecuación $y \geq -x$
Elaborado por: Parra, F (2023).

Ahora graficamos la segunda inecuación:

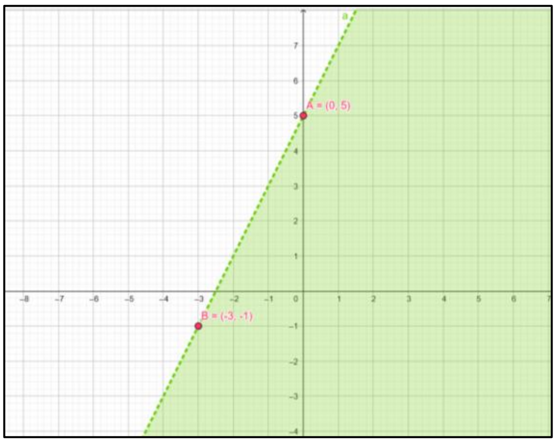
$y < 2x + 5$

$y = 2x + 5$

$x = 0 \rightarrow y = 2(0) + 5 \rightarrow y = 0 + 5 \rightarrow y = 5$ $x = -3 \rightarrow y = 2(-3) + 5 \rightarrow y = -6 + 5 \rightarrow y = -1$

A(0,5)

B(-3, -1)



Descripción: Gráfica de la inecuación $y < 2x + 5$
Elaborado por: Parra, F (2023).

Colocamos puntos de prueba para cada inecuación para luego pintar la intersección de las dos y hallar la región factible.

Punto de prueba

Inecuación 1: $y \geq -x$

P(-4,2)

$2 \geq -(-4)$

$2 \geq -4$ **Falso**

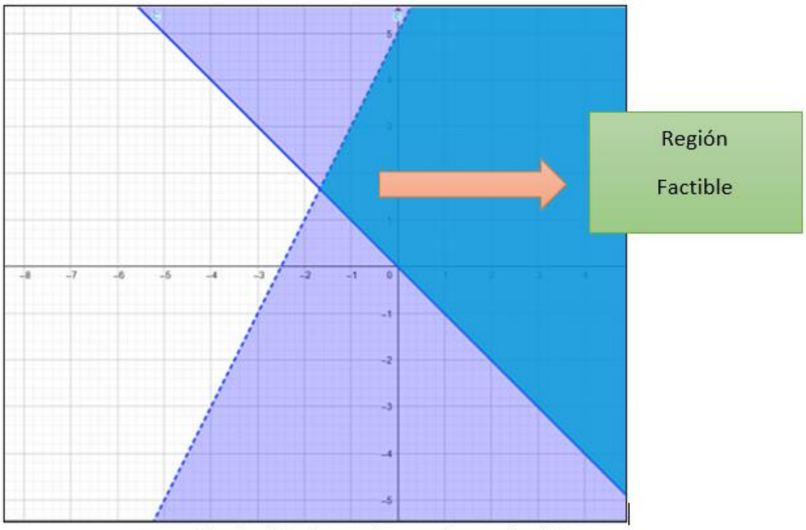
Inecuación 2: y < 2x + 5

P(0,0)

0 < 2(0) + 5

0 < 0 + 5

0 < 5 **Verdadero**



Descripción: Región factible sistema inecuaciones Ejercicio 1
Elaborado por: Parra, F (2023).

Por último, graficamos las dos inecuaciones en un mismo plano cartesiano y observamos que la región factible es lo que esta con color azul.

La región factible es **NO ACOTADA** porque queda abierta en un extremo.

Ejemplo 2: Hallar la región factible en el siguiente sistema de inecuaciones.

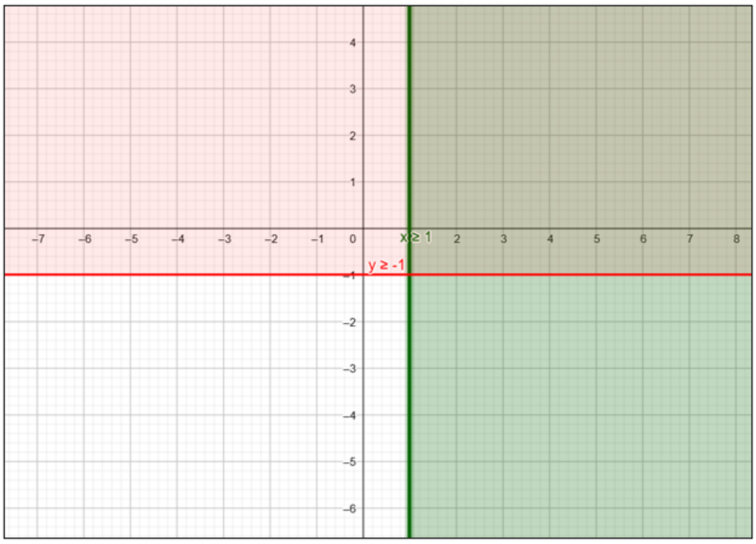
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \\ 2x + y \leq 3 \end{cases}$$

Debemos seguir los pasos para graficar una inecuación.

Observamos que la primera y segunda inecuación son funciones constantes debemos trazar una recta en cada una de ellas.

x = 1

y = - 1



Descripción: Gráfica funciones constantes x ≥ 1, y ≥ -1
Elaborado por: Parra, F (2023).

Ahora graficamos la tercera inecuación:

$2x + y \leq 3$

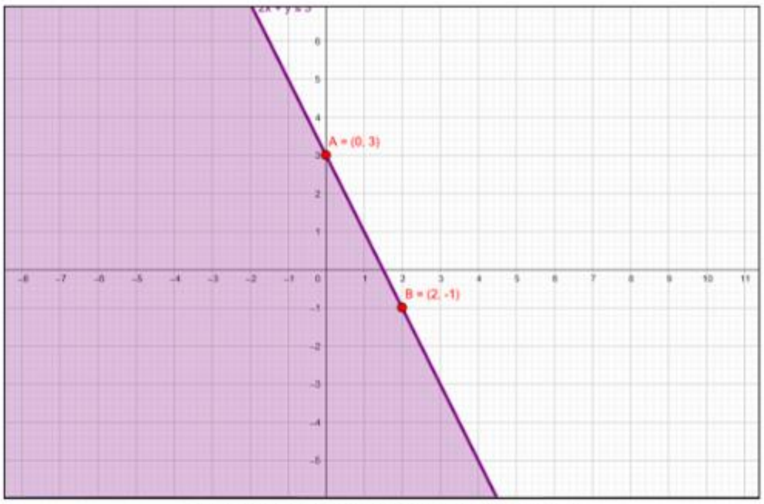
$2x + y = 3$

$x = 0 \rightarrow 2(0) + y = 3 \rightarrow 0 + y = 3 \rightarrow y = 3$

$x = 2 \rightarrow 2(2) + y = 3 \rightarrow 4 + y = 3 \rightarrow y = 3 - 4 \rightarrow y = -1$

A(0,3)

B(2,-1)



Descripción: Gráfica inecuación 2x + y ≤ 3
Elaborado por: Parra, F (2023)

Colocamos puntos de prueba para la tercera inecuación ya que las otras dos son constantes, para luego pintar la intersección de las tres inecuaciones y hallar la región factible.

Punto de prueba

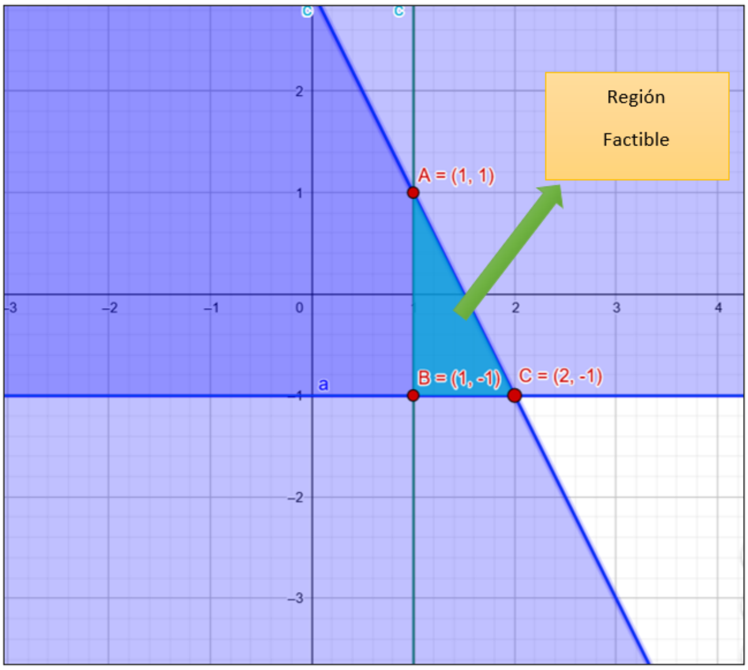
Inecuación 3: $2x + y \leq 3$

P(0,0)

$2(0) + \leq 3$

$0 + 0 \leq 3$

$0 \leq 3$ **Verdadero**



Descripción: Región factible sistema inecuaciones Ejercicio 2
Elaborado por: Parra, F (2023).

Por último, graficamos las dos inecuaciones en un mismo plano cartesiano y observamos que la región factible es lo que esta con color celeste.

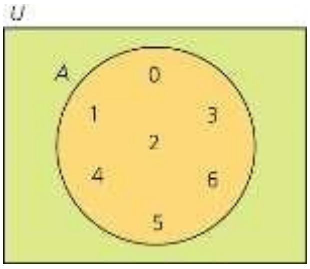
La región factible es **ACOTADA** ya que todos sus extremos están cerrados y forman un triángulo rectángulo con sus respectivos vértices **A**(1,1), **B**(1,-1), **C**(2,-1).

Conjuntos

Un conjunto es la agrupación, clase, o colección de objetos o en su defecto de elementos que pertenecen y responden a la misma categoría o grupo de cosas, por eso se los puede agrupar en el mismo conjunto.

Representación de un conjunto

Hay dos formas de representar los conjuntos en forma gráfica mediante diagramas de Venn y también entre llaves.



A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

Descripción: Conjuntos
Fuente: Cañar, Y. (2023).

Determinación de un conjunto

Por comprensión: Cuando indicamos la ley de formación del conjunto escribiendo dentro de una llave una propiedad característica de los elementos del conjunto y solamente de ellos.

Ejemplos:

A = {meses del año}
B = {vocales}
C = {marcas de carros}
D= {número primos}

Por extensión: Cuando indicamos cada uno de los elementos del conjunto, es decir, escribimos dentro de una llave los elementos del conjunto.

Ejemplos:

A = {enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre}
B = {a, e, i, o, u}
C = {Mazda, Toyota, Kia, Chevrolet, Nissan, …}
D = {1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …}

Por fórmula o simbólicamente: Cuando utilizamos símbolos matemáticos para expresar los elementos del conjunto; x/x se lee x tal que x; $\wedge$ en lugar de y, $\vee$ en lugar de o.

Ejemplos:

A = {x/x $\in$ meses del año}
B = {x/x $\in$ vocales}

C = {x/x ∈ marcas de carros}
D = {x/x ∈ números primos}

Clases de conjuntos

Conjunto Finito: Es el conjunto al que se le puede determinar su cardinalidad o puede llegar a contar su último elemento.

Ejemplo:

M = {x/x es divisor de 24}
M = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

Conjunto Infinito: Es el conjunto que, por tener muchísimos elementos, no se le puede llegar a contar su último elemento.

Ejemplo:

A= {x/x sea grano de sal}

Conjunto Vacío: Es el conjunto cuya cardinalidad es cero ya que carece de elementos. El símbolo del conjunto vacío Φ o { }.

Ejemplo:

C = {x/x sea habitantes del sol}

Conjunto Unitario: Es el conjunto que solo tiene un elemento. Su cardinalidad es uno (1).

Ejemplo:

D = {x/x sea vocal de la palabra "pez"}

Conjunto Universo: Es el conjunto que contiene todos los elementos de estudio dentro de un determinado contexto, se representa con la letra U.

Ejemplo: Letras del alfabeto

U = {a, b, c, ……………….x, y, z}

Operaciones con conjuntos

Unión de conjuntos

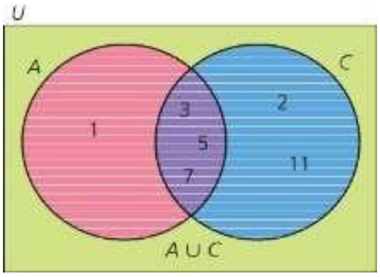
La unión de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se denota: A U B. La unión de conjuntos se define como:

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Ejemplo:

Determine la unión del conjunto A = {1, 3, 5, 7} con el conjunto C = {2, 3, 5, 7, 11}.

$$A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$$



Descripción: Conjuntos
Fuente: Cañar, Y. (2023).

Intersección de conjuntos

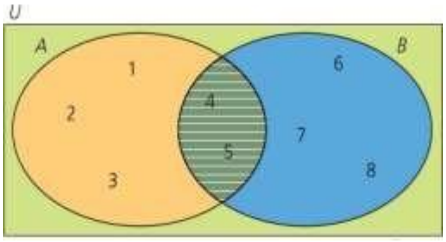
La intersección es el conjunto formado por los elementos que son comunes entre dos o más conjuntos dados. Se denota por A ∩ B, que se lee: A intersección B. La intersección de A y B también se puede definir:

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Ejemplo:

Determine la intersección del conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5} con el conjunto B = {4, 5, 6, 7, 8}.

$$A \cap B = \{4, 5\}$$



Descripción: Conjuntos
Fuente: Cañar, Y. (2023).

Diferencia de conjuntos

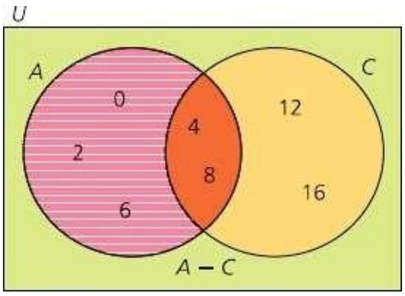
A la diferencia de dos conjuntos A y B pertenecen todos los elementos de A pero que no pertenecen a B. A la diferencia la denotamos por: A – B. Y se define simbólicamente como:

$$A - B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Ejemplo:

Determine la diferencia entre los conjuntos A = {0, 2, 4, 6, 8} y C = {4, 8, 12, 16}.

$$A - C = \{0, 2, 6\}$$



Descripción: Conjuntos
Fuente: Cañar, Y. (2023).

Diferencia simétrica

A la diferencia simétrica entre un conjunto A y un conjunto B pertenecen todos los elementos que pertenecen a A o a pertenecen a B, pero no a ambos. Se denota como A Δ B. Simbólicamente lo expresamos:

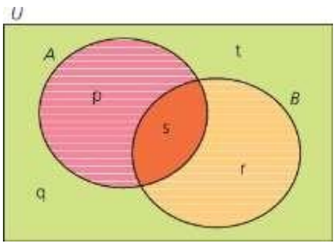
$$A \Delta B = \{x / x \in A \cup B \text{ y } x \notin A \cap B\}$$

Ejemplo:

Dados los conjuntos U = {p, q, r, s, t}, A = {p, s} y B = {r, s}.

Se observa que **p** pertenece a A pero no a B, **q** pertenece a B pero no a A. Por lo tanto:

$$A \Delta B = \{p, r\}$$



Descripción: Conjuntos
Fuente: Cañar, Y. (2023)

Complemento

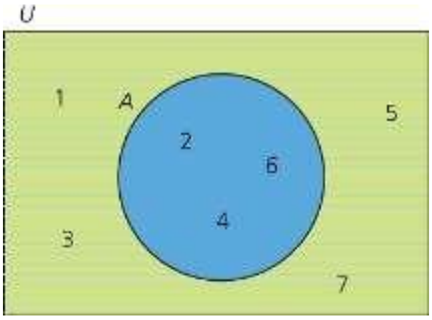
Sea A un subconjunto del conjunto universal U, el conjunto de elementos que pertenecen a U y no pertenecen a A se denominan complemento de A; se denota como A^C. Simbólicamente lo expresamos:

$$A^C = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}$$

Ejemplo:

Si U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} y A = {4, 5, 6, 7, 8}, determine el complemento de A.

$$A^c = \{1, 3, 5, 7\}$$



Descripción: Conjuntos
Fuente: Cañar, Y. (2023).

Probabilidades

La probabilidad es el cálculo matemático que evalúa las posibilidades que existen de que una cosa suceda cuando interviene el azar.

Casos favorables: son los posibles casos que se den según los sucesos enunciados.

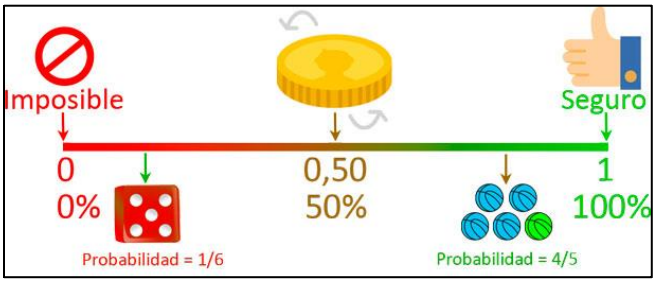
Casos posibles: son todos los casos que se dan en el evento.

La fórmula de la probabilidad es la siguiente:

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ de\ A}{número\ total\ de\ casos\ posibles}$$

Esta expresión se conoce como **Ley de Laplace.**

Mientras más se acerca el valor de la probabilidad a 0, disminuye la posibilidad de que ocurra el evento. Mientras más se acerca el valor a 1, aumenta la posibilidad de que ocurra.



Descripción: Probabilidad entre 0 y 1
Fuente: Matemática, física y mucho más

Probabilidad de un evento

Un **evento simple** es un evento con *un* solo resultado. Sacar un 1 sería un evento simple, porque existe sólo un resultado que funciona: 1. Sacar más que 5 también sería un evento simple, porque el evento incluye sólo al 6 como un resultado válido. Un **evento compuesto** es un evento con más de un resultado. Por ejemplo, lanzar un dado de 6 lados y sacar un número par: 2, 4, y 6.

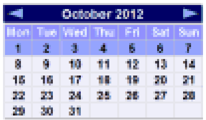
Complemento de un evento

Son todos los resultados que **NO** son el evento. Entonces, el complemento de un evento son todos los **otros** resultados (**no** los que queremos).

Y juntos, el Evento y su Complemento conforman todos los resultados posibles.

La regla del complemento se utiliza para determinar la probabilidad de que ocurra un evento restando del número 1 la probabilidad de que un evento no ocurra. Si P(A) es la probabilidad del evento A y P(~A) es el complemento de A, P(A) + P(~A) = 1 o P(A) = 1 - P(~A).

Cuando el evento es **Cara**, el complemento es **Sello.**



Cuando el evento es **{lunes, miércoles}** el complemento es **{martes, jueves, viernes, sábado, domingo}**

Cuando el evento es **{Corazones rojos}** el complemento es **{Corazones negros, Diamantes, Tréboles, Comodines}**

Ejemplos

1. Calcule la probabilidad de que al lanzar un dado salga: a) el número 5, b) un número par, c) un múltiplo de 3, d) un número mayor que 4

Los posibles casos al lanzar un dado son: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Se aplica la Ley de Laplace para todos los casos:

a) El número 5

Casos favorables: 5

$$P(\#5) = \frac{1}{6} = 0{,}1667 = 16{,}67\%$$

b) Un número par

Casos favorables: 2, 4, 6

$$P(Par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

c) Un múltiplo de 3

Casos favorables: 3, 6

$$P(Múltiplo\ 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 33{,}33\%$$

d) Un número mayor que 4

Casos favorables: 5, 6

$$P(Mayor\ que\ 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 33{,}33\%$$

2. De una baraja de 52 cartas determinar la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos: a) sacar un trébol b) sacar un rey.

Número total de casos posibles: 52 cartas

a) En la baraja hay 13 tréboles, la probabilidad será:

$$P(Trébol) = \frac{\text{número de casos favorables de trébol}}{\text{número total de casos posibles}}$$

$$P(Trébol) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 25\%$$

b) Se tiene 4 reyes en la baraja, la probabilidad será:

$$P(Reyes) = \frac{\text{número de casos favorables de reyes}}{\text{número total de casos posibles}}$$

$$P(Reyes) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 7{,}69\%$$

Probabilidad condicionada

Introducción

La probabilidad condicionada es uno de los conceptos clave en Teoría de la Probabilidad. En el tema anterior se ha introducido el concepto de probabilidad considerando que la única información sobre el experimento era el espacio muestral. Sin embargo, hay situaciones en las que se incorpora información suplementaria como puede ser que ha ocurrido otro suceso, con lo que puede variar el espacio de resultados posibles y consecuentemente, sus probabilidades.

Probabilidad condicionada:

La probabilidad condicional, o probabilidad condicionada es la probabilidad de que un evento en particular ocurra, dado que otro evento haya

La probabilidad condicional es aquella que depende de que se haya cumplido otro hecho relacionado; la notación sería P(A|B) y la fórmula es la siguiente:

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Donde:

$\boldsymbol{P(A|B)}$**:** Probabilidad de A dado que B se ha cumplido
$\boldsymbol{P(A \cap B)}$**:** Probabilidad de A y de B
$\boldsymbol{P(B)}$**:** Probabilidad de B

En algunos problemas, puede que sea necesario calcular la probabilidad de que ocurra el evento B, dado que ha ocurrido A. En ese caso, simplemente invertimos el orden de las variables:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

La probabilidad condicionada se relaciona con la regla general de la multiplicación de probabilidades ya que para determinar la probabilidad condicionada se utiliza la multiplicación de probabilidades.

La regla general de la multiplicación en probabilidad eventos dependientes:

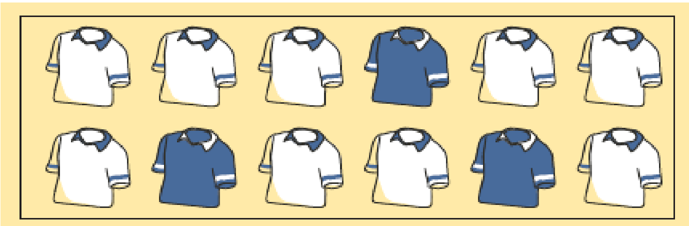
Sirve para determinar la probabilidad conjunta de dos eventos cuando éstos son dependientes. Por ejemplo, cuando el evento B ocurre después del evento A, y A influye en la probabilidad de que el evento B suceda, entonces A y B no son independientes.

La regla general de la multiplicación establece que, en caso de dos eventos, A y B, la probabilidad conjunta de que ambos eventos ocurran se determina multiplicando la probabilidad de que ocurra el evento A por la probabilidad condicional de que ocurra el evento B, dado que A ha ocurrido. Simbólicamente, la probabilidad conjunta, P(A y B), se calcula de la siguiente manera:

REGLA GENERAL DE LA MULTIPLICACIÓN: $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$

Ejemplo:

Un golfista tiene 12 camisas en su clóset. Suponga que 9 son blancas y los demás azules. Como se viste de noche, simplemente toma una camisa y se la pone. Juega golf dos veces seguidas y no las lava. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos camisas elegidas sean blancas?



Sea:
B para las camisetas blancas
A para las camisetas azules

El evento que se relaciona con el que la primera camisa seleccionada sea blanca es B_1.

9 camisas blancas

La probabilidad es P(B_1) = $\frac{9}{12}$, porque 9 de cada 12 camisas son blancas.

$P(B_1) = \frac{9}{12}$

El evento de que la segunda camisa seleccionada sea blanca (B_2). La probabilidad condicional relacionada con el hecho de que la segunda camisa seleccionada sea blanca, dado que la primera camisa seleccionada sea blanca, es $P(B_2|B_1) = \frac{8}{11}$.

Después de que se selecciona la primera camisa blanca, quedan 11 camisas en el clóset y 8 son blancas.

8 camisas blancas

$$P(B_2|B_1) = \frac{8}{11}$$

11 camisas en el closet

Para determinar la probabilidad de que se elijan 2 camisas blancas aplicamos la fórmula de la multiplicación es:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1)$$

Donde:

$\boldsymbol{P(B_1)}$ = probabilidad de elegir la primera camisa blanca
$\boldsymbol{P(B_1 \cap B_2)}$ = probabilidad de elegir la primera y segunda camisa blanca
$\boldsymbol{P(B_2|B_1)}$ = probabilidad de elegir la segunda camisa blanca dado que ya se eligió la primera camisa blanca.

$P(B_1) = \frac{9}{12}$

$P(B_2|B_1) = \frac{8}{11}$

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{9}{12} \times \frac{8}{11}$$

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{9 \times \overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{12}} \times 11} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \times 2}{\underset{1}{\cancel{3}} \times 11} = \frac{3 \times 2}{1 \times 11} = \frac{6}{11}$$

$$P(B_1 \cap B_2) = 0{,}545$$

$$P(B_1 \cap B_2) = 54{,}5\%$$

Solución: La probabilidad de obtener dos camisas blancas es del 54,5%

Ejemplo

1. Un deportista tiene 12 camisetas en su clóset. Supongamos que 9 son blancas y las demás camisetas son de color azul. Como realiza deporte dos veces por semana, simplemente toma una camisa al azar y se la pone.

Si saco una camiseta blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la camisa elegida sean número par?

Solución:

a) Usamos la fórmula de probabilidad condicional:

$$P(P|B) = \frac{P(P \cap B)}{P(B)}$$

Sea:
B: Camiseta blanca
A: Camiseta azul
P: Camiseta pares

Encontramos $P(P \cap B)$ = la probabilidad que la camiseta sea Par (P) y Blanca (B)

Sabiendo que:

$$P(P \cap B) = \frac{\textit{son las camisetas que cumplen la condición de que sean par y blancas}}{\textit{el total de las camisetas}}$$

$P(P \cap B) = \dfrac{4}{12}$

Simplificando: $\frac{1}{3}$
Decimales: 0,33
Porcentaje: 33,3%

Encontramos $P(B) = \frac{casos\ favorables}{casos\ totales}$
$P(B) = \dfrac{9}{12}$
Simplificando: $\frac{3}{4}$
Decimales: 0,75
Porcentaje: ⇒ 75%

b) Reemplazamos los valores encontrados en la fórmula.

$$P(P|B) = \frac{33{,}3}{75} = 0,44 \ \Rightarrow 44,4\%$$

La probabilidad de que la camisa elegida sea número par y blanca es de 44,4%

Independencia de sucesos

Dos sucesos A y B son ***independientes*** si la probabilidad de que uno de ellos ocurra no depende de que haya ocurrido el otro. En caso contrario son sucesos dependientes.

INDEPENDENCIA Si un evento ocurre, no tiene ningún efecto sobre la probabilidad de que otro evento suceda.

Una forma de entender la independencia consiste en suponer que los eventos A y B ocurren en diferentes tiempos.

Por ejemplo, cuando el evento B ocurre después del evento A, ¿influye A en la probabilidad de que el evento B ocurra? Si la respuesta es no, entonces A y B son eventos independientes.

Para ilustrar la independencia, supongamos que se lanzan al aire dos monedas.

El resultado del lanzamiento de una moneda (cara o cruz) no se altera por el resultado de cualquier moneda lanzada previamente (cara o cruz).

En el caso de dos o más eventos independientes A y B, la probabilidad de que A y B ocurran se determina multiplicando las dos probabilidades, tal es la regla especial de la multiplicación, cuya expresión simbólica es la siguiente:

Regla especial de la Multiplicación eventos Independientes: $P\ (A\ y\ B) = P(A)P(B)$

Ejemplos

Ejemplo 1.

Tomamos el ejemplo del lanzamiento de las dos monedas

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire en ambas caiga cara?

La primera moneda:

= cara

$= \frac{1}{2}$

La segunda moneda:

= cara

$= \frac{1}{2}$

Entonces aplicamos ley de la multiplicación:

$P(C_1, C_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Decimales= 0,25

Porcentaje= 25%

Evento 1: **cara – cara**

Evento 2: cara – sello

Evento 3: sello – cara

Evento 4: sello - sello

La probabilidad que, al lanzar dos monedas al aire, en ambas caiga cara, es del 25 por ciento.

Ejemplo 3. Al lanzar dos dados, determinar la probabilidad de obtener una decena.

(Sacar un seis en el primer dado)

$P_1 = \frac{1}{6}$

(Sacar un seis en el segundo dado)

$$P_2 = \frac{1}{6}$$

El número que salga en un dado no influye en el otro dado, se puede decir que son independiente.

$$P = P_1 x P_2$$

$$P = \frac{1}{6} x \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

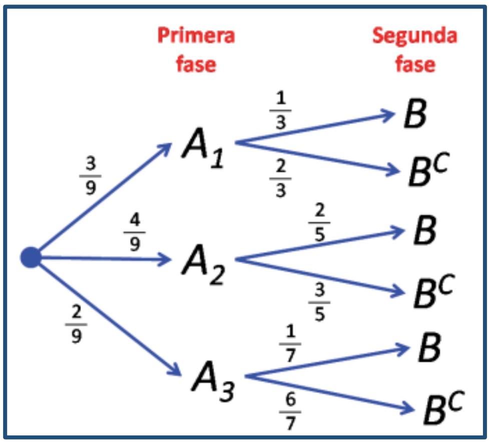
Por lo tanto, la probabilidad de que al lanzar dos dados se obtenga una decena es de: $P = \frac{1}{6} x \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Diagrama de Árbol

Un diagrama de árbol es una representación gráfica de los posibles resultados de un experimento que tiene varios pasos**.** Dicho diagrama nos permite calcular la probabilidad de que ocurra un evento de una manera muy sencilla.

Un diagrama de árbol nace de una raíz o tronco de la que salen diferentes caminos, llamadas ramas de primera generación. Estas ramas deben representar todas las posibilidades que aparecer en la primera fase de la construcción del diagrama y terminan en vértices del nudo. A su vez, de estos nudos pueden nacer nuevas ramas, denominadas ramas de segunda generación, que vuelven a terminar en nuevos nudos. Hasta llegar a nudos terminales, de los que ya no salen más ramas.

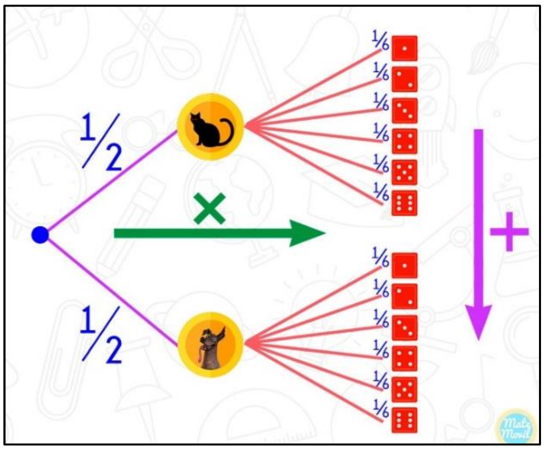
Para formar un diagrama de árbol, los sucesos que pueden ocurrir en la primera etapa de un experimento aleatorio deben formar un sistema completo de sucesos, es decir, describir el espacio muestral de forma exhaustiva y excluyente.



Descripción: Diagrama de árbol con indicaciones de sus respectivas probabilidades.
Fuente: Revista de Educación Matemática (2018)

Para determinar la probabilidad de que suceda un evento en específico, usaremos un truco, para calcular la probabilidad de un evento en específico avanzamos hacia la derecha y multiplicamos las probabilidades de la primera rama por la segunda rama del evento que buscamos, por otro lado, si deseamos calcular una probabilidad de más de un evento avanzamos hacia abajo y debemos sumar la probabilidad de cada evento.

La suma de todas las probabilidades debe ser 1; ya que, representan todas las posibilidades de los sucesos que pueden ocurrir tras pasar por ese nudo en dirección a la siguiente fase



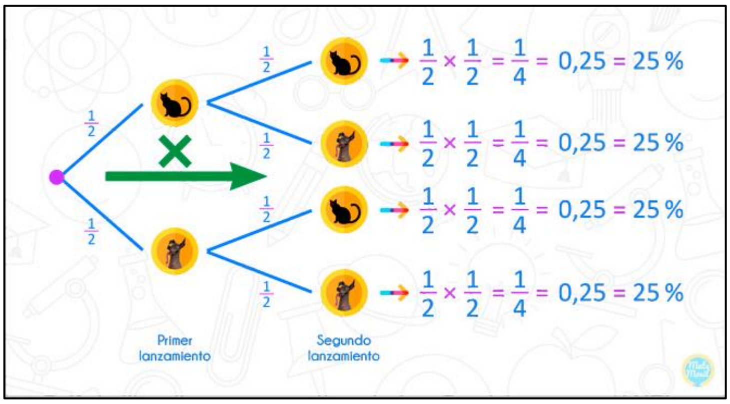
Descripción: Diagrama de árbol
Fuente: Mate móvil (2022)

Ejemplos

Ejemplo 1. Una moneda tiene en sus caras un gato y un perro. Si se lanza 2 veces la moneda, calcular:
a) la probabilidad de obtener 2 gatos.
b) la probabilidad de obtener 1 gato en cualquier moneda.

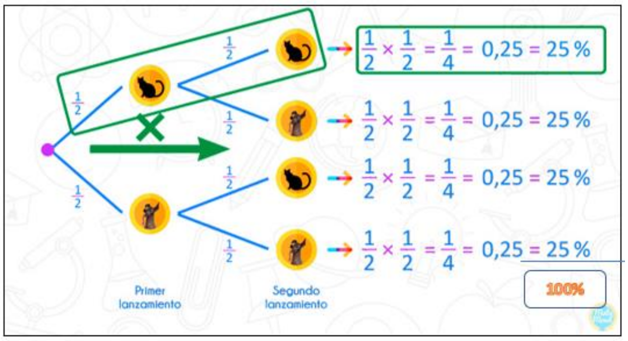
Solución:

Vamos a elaborar el diagrama de árbol para este experimento. Calculamos la probabilidad para cada uno de los posibles casos, cuando avanzamos a la derecha, multiplicamos.



Descripción: diagrama de árbol ejercicio 1
Fuente: Mate móvil (2022)

a) La probabilidad de obtener 2 gatos, la podemos observar en el gráfico.

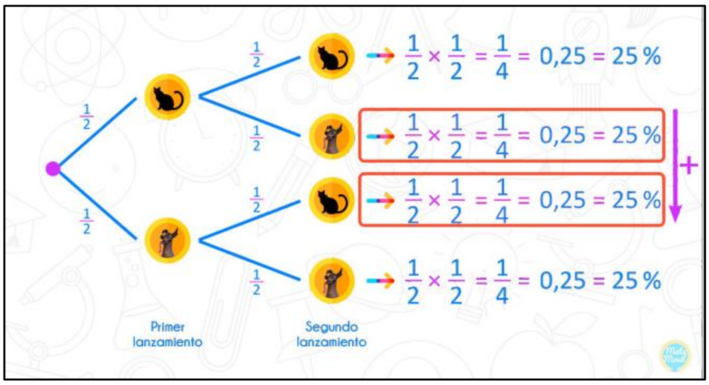


Descripción: diagrama del árbol ejercicio 1
Fuente: Mate móvil (2022)

$$P(2gatos) = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

b) La probabilidad de obtener solo 1 gato, se calcula sumando 2 probabilidades, ya que hay 2 maneras de obtener solo 1 gato:
– Obtener gato y perro.
– Obtener perro y gato.

Recuerda que cuando avanzamos hacia abajo, entonces sumamos:



Descripción: diagrama del árbol ejercicio 1
Fuente: Mate móvil (2022)

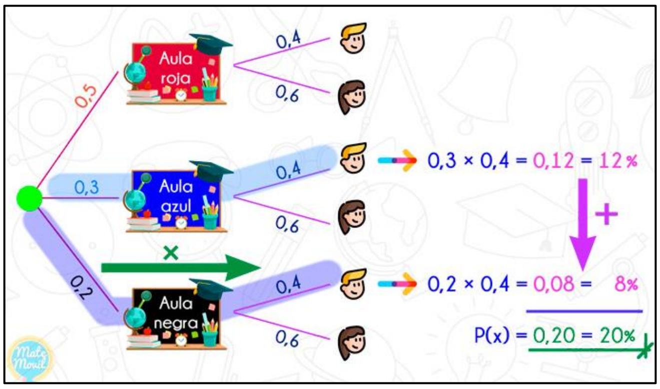
Por lo tanto, la probabilidad de obtener 1 gato en una moneda:

$$P(1gato) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 50\%$$

Ejemplo 2. En una academia hay 3 aulas: El aula roja tiene al 50 % de los estudiantes de la academia, el aula azul al 30 % y el aula negra al 20 %. Además, en cada aula hay un 40 % de hombres. Si se selecciona un estudiante al azar, **¿cuál es la probabilidad de que sea un estudiante hombre del aula negra o un hombre del aula azul?**

Solución:

Vamos a calcular la probabilidad que nos pide el reto. Recuerda que multiplicamos cuando avanzamos hacia la derecha y sumamos cuando avanzamos hacia abajo.



Descripción: Diagrama de árbol ejercicio 2
Fuente: Mate móvil (2022)

La probabilidad de que sea un estudiante hombre del aula negra o un hombre del aula azul es 0,20 o 20%

Referencias Bibliográficas / Autores

- Ministerio de Educación del Ecuador (2017). Adaptaciones curriculares para la educación con personas jóvenes y adultas. Subnivel superior de educación general básica y nivel de bachillerato.

- Jacobo, L. (2010). Teoría de Conjuntos. Recuperado de

  http://probabilidadestadistic.blogspot.com/2010/08/teoria-de-conjuntos.html

- Matemática, Física y mucho más. (2019). *Probabilidades.* Recuperado de https://matemovil.com/probabilidades-ejercicios-resueltos/

bachillerato.

- DERECHOS RESERVADOS © 2012, 2008 respecto a la cuarta edición en español por McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. A Subsidiary of **The McGraw-Hill** Companies, Inc. Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A, Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe, Delegación Álvaro Obregón, C.P. 01376, México, D.F. Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

- Matemática, Física y mucho más Recuperado de https://matemovil.com/diagrama-de-arbol-probabilidades/