UNIDAD EDUCATIVA JUAN MONTALVO

EDUCANDO CON VERDAD, CIENCIA Y LIBERTAD

**C12 Modalidad a Distancia – Virtual**

# *Matemática*

## Guía de Estudios para Examen de Ubicación

## 3ero BGU

## Índice:


Índice: 1

Sucesión 4

Progresión aritmética 4

Diferencia 4

Término General 6

Suma de términos 8

Progresión Geométrica 9

¿Cómo elaborar una Progresión Geométrica? 9

Razón 10

Término General 11

Suma de términos 12

Plano cartesiano en tres dimensiones 14

14

Vectores 16

Elementos del vector: 16

Vectores en $\mathbb{R}3$ 16

Módulo de vectores $\mathbb{R}3$ 17

Operaciones entre vectores $\mathbb{R}3$ 18

Suma de vectores: 18

Resta de vectores 19

Producto escalar en 20

Caso 1: 20

Propiedades: 20

Caso 2 21

Producto vectorial $A \times B$ 22

Propiedades: 22

Definición de límite ____ 23
Propiedades de los límites: ____ 24
Estimación del límite aplicando propiedades: ____ 25
Concepto de infinito ____ 27
Estimación del límite con valores que tienden al infinito: ____ 27
Operaciones de límites hacia el infinito: ____ 28
Indeterminación ____ 31
Límites indeterminados cero entre cero 00 ____ 31
Técnicas para levantar una indeterminación: ____ 31
Levantar indeterminación usando factorización: ____ 31
DERIVACIÓN ____ 34
Introducción: ____ 34
Incrementos: ____ 34
Derivada de una función de una variable. ____ 34
Interpretación geométrica de la derivada: ____ 34
Derivada por definición ____ 35
Propiedades para derivas de funciones algebraicas. ____ 38
Regla de la cadena: ____ 40
Introducción ____ 41
Derivadas de orden superior ____ 41
Evaluación de una derivada de orden superior ____ 44
Integración ____ 46
Constante de integración. Integral indefinida ____ 48
Propiedades de la integral: ____ 48
INTEGRALES INMEDIATAS ____ 48
Ejercicios Resueltos ____ 49
Integrales definidas ____ 51
Propiedades: ____ 52
Calculo de áreas ____ 52
Ejercicios resueltos ____ 53
Introducción ____ 56
La teoría combinatoria ____ 56
FACTORIAL ____ 56
Simplificación de fracciones usando factorial ____ 58
Análisis combinatorio ____ 59

Permutación Lineal sin repetición 59
Permutación con repetición 62
Variaciones: 65
Variaciones sin repetición. 65
Problemas resueltos. 65
Variaciones con repeticiones 67
Problemas resueltos. 68
Combinaciones 69
Combinaciones sin repetición 69
Ejemplos: 69
Combinaciones con repetición. 71
Ejemplos: 71
Referencias Bibliográficas/Autores 73

## Sucesión

Una sucesión es un conjunto de elementos ordenados que siguen una regla en común, cada elemento se llama término y se representa por la letra $a_n$, donde n indica el lugar que ocupa el término en la sucesión, así: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_n)$

Una sucesión se puede representar con números, letras, figuras entre otras.

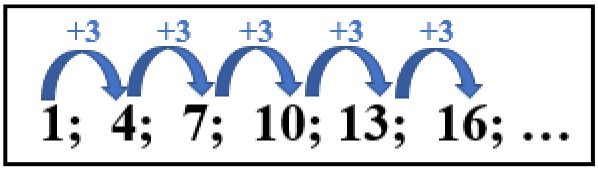
## Progresión aritmética

**Definición**

Una progresión aritmética es una sucesión de números, en donde cada término, excepto el primero, se obtiene sumando o restando una cantidad fija **"d"** al término anterior, a esa cantidad se le llama diferencia de la pro

Una progresión aritmética se obtiene al tomar un número cualquiera como primer término y sumar o restar cualquier número de manera reiterada de esa manera se obtienen los siguientes términos ya sea el segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto término.

**Ejemplo:**




**Explicación**: Se parte un primer término cualquiera, en el ejemplo es el número 1.

- Para obtener el **segundo término**, se le suma 3 unidades al término anterior así: 1+3 = 4
- Para obtener el **tercer término**, se le suma 3 unidades al término anterior así: 4+3 = 7
- Para obtener el **cuarto término**, se le suma 3 unidades al término anterior así: 7+3 = 10
- Para obtener el **quinto término**, se le suma 3 unidades al término anterior así:10+3 = 13
- Para obtener el **sexto término**, se le suma 3 unidades al término anterior así: 13+3 = 16

## Diferencia

En una progresión Aritmética la diferencia es el valor fijo que se suma o resta Para determinar el valor de ***d*** (diferencia), restamos, desde el segundo término menos el término anterior por lo tanto la fórmula para encontrar la diferencia es:

$$\boxed{d = a_n - a_{n-1}}$$

Donde:

$d = diferencia$

$a_n = término\ posterior$

$a_{n-1} = término\ anterior$

Si el resultado de todas las restas es un mismo valor, se dice que ese valor es la diferencia.

**Ejemplo:**

En la secuencia de números: **3; 5; 7; 9; 11; 13,…** encontrar la diferencia**.**

Para encontrar la diferencia se resta, desde el segundo término menos el término anterior así:

- $d = a_2 - a_1;$ $d = 5 - 3 = 2$
- $d = a_3 - a_2;$ $d = 7 - 5 = 2$
- $d = a_4 - a_3;$ $d = 9 - 7 = 2$
- $d = a_5 - a_4;$ $d = 11 - 9 = 2$
- $d = a_6 - a_5;$ $d = 13 - 11 = 2$

Como el resultado de todas las restas es 2, la diferencia *d = 2*

**Ejercicios resueltos:**

Determinar la diferencia de las siguientes progresiones aritméticas:

a. 1, 4, 7, 10, 13, …

| Datos: | Solución: |
|---|---|
| $\boldsymbol{a_1 = 1}$; | $\boldsymbol{d = a_3 - a_2}$ |
| $\boldsymbol{a_2 = 4}$; | $\boldsymbol{d = 7 - 4}$ |
| $\boldsymbol{a_3 = 7}$; | $\boldsymbol{d = 3}$ |

b. 8, 6, 4, 2, 0,…

| **Datos:** | **Solución:** |
|---|---|
| $a_1 = 8;$ | $d = a_3 - a_2$ |
| $a_2 = 6;$ | $d = 4 - 6$ |
| $a_3 = 4;$ | $d = -2$ |

El primer término de una progresión aritmética es -1 y el término décimo quinto es 27. Halle la diferencia de esta progresión.

| Datos: | Solución: |
|---|---|
| $\boldsymbol{a_1 = -1};$ | $a_n = a_1 + (n-1)d$ |
| | $27 = -1 + (15-1)d$ |
| $\boldsymbol{n = 15};$ | $27 = -1 + 15d - d$ |
| | $27 + 1 = 14d$ |
| $\boldsymbol{a_n = 27}$ | $28 = 14d$ |
| | $d = \frac{28}{14}$ |
| | $d = 2$ |

## Término General

El término general de una progresión aritmética es una fórmula que permite hallar cualquier término de la sucesión.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Donde:

$a_n$: es el término enésimo

$a_1$: es el primer término

$d$ : es la diferencia

$n$ : es el lugar que ocupa el término enésimo

## Ejemplo:

Encontrar el término general de una sucesión si se conoce el primer término de una sucesión $a_1 = 1$ y la diferencia $d = 3$

Paso 1: Reemplazar los datos en la fórmula general, así:

$$a_n = a_1 + (n-1)d;$$

$$a_n = 1 + (n-1)(3);$$

$$a_n = 1 + 3n - 3;$$

$$a_n = 3n - 2;$$

## Ejercicios resueltos:

Escribir el término general de las siguientes progresiones aritméticas

a. 4; 6; 8; 10; …

| **Datos:** | **Solución:** |
|---|---|
| $a_1 = 4;$<br><br>$d = 2$ | $a_n = a_1 + (n-1)d;$<br>$a_n = 4 + (n-1)(2)$<br>$a_n = 4 + 2n - 2$<br>$a_n = 2 + 2n$ |

b. 3; -1; -5; -9, …

| **Datos:** | **Solución:** |
|---|---|
| $a_1 = 3$<br><br>$d = -4$ | $a_n = a_1 + (n-1)d$<br>$a_n = 3 + (n-1)(-4)$<br>$a_n = 3 - 4n + 4$<br>$a_n = 7 - 4n$ |

c. 2; 5; 8; 11, …

| **Datos:** | **Solución:** |
|---|---|
| $a_1 = 2$<br><br>$d = 3$ | $a_n = a_1 + (n-1)d$<br>$a_n = 2 + (n-1)(3)$<br>$a_n = 2 + 3n - 3$<br>$a_n = -1 + 3n$ |

## Suma de términos

En varios ejercicios de progresiones aritméticas, es posible determinar de la suma de los términos de manera directa, por ejemplo:

4; 6; 8; 10;…

La suma es: 4+6+8+10=28

Hay progresiones que tienen un gran número de términos y sería difícil calcular la suma de los *n* primeros términos de manera directa, por lo que podemos usar las siguientes expresiones dependiendo si conoce o no la diferencia de la sucesión.

| Sin conocer la diferencia | **Conociendo la diferencia** |
|---|---|
| $\boldsymbol{Sn = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$ | $\boldsymbol{Sn = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}}$ |
| **Sn:** Suma de términos de la progresión<br>**n:** número de términos<br>$\boldsymbol{a_1}$: primer término<br>$\boldsymbol{a_n}$: último término | **Sn:** Suma de términos de la progresión<br>**n:** número de términos<br>$\boldsymbol{a_1}$: primer término<br>$\boldsymbol{a_n}$: último término<br>**d:** diferencia |

**Ejemplo 1. Calcular la suma de los primeros 4 términos de la siguiente progresión aritmética: 4; 6; 8; 10;…**

| **Datos:** | **Solución:** |
|---|---|
| $a_1 = 4;$<br><br>$a_n = 10;$<br><br>$n = 4$ | $Sn = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$<br><br>$Sn = \frac{4}{2}(4 + 10)$<br><br>$Sn = 2(14)$<br><br>$Sn = 28$ |

# Progresión Geométrica

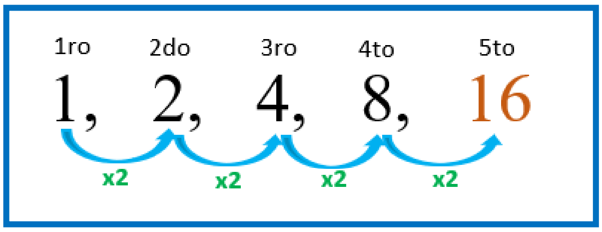
**Definición**

Una progresión geométrica es una sucesión en la que cada término, salvo el primero, se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad fija r, llamada razón de la progresión.

## ¿Cómo elaborar una Progresión Geométrica?

Una Progresión Geométrica se obtiene al tomar un número cualesquiera como primer término y multiplicar por cualquier número de manera reiterada de esa manera se obtienen los siguientes términos ya sea el segundo, tercero, cuarto, quinto ó sexto término.

**Ejemplo 1:**




**Descripción:** Representación gráfica del ejercicio.
**Elaborado por:** Cevallos, M. (2022).

**Explicación**: Se parte un primer término cualesquiera, en nuestro ejemplo es el número 1.

- Para obtener el **segundo término**, se le multiplica por 2 al término anterior así: $1 \times 2 = 2$
- Para obtener el **tercer término**, se le multiplica por 2 al término anterior así: $2 \times 2 = 4$
- Para obtener el **cuarto término**, se le multiplica por 2 al término anterior así: $4 \times 2 = 8$
- Para obtener el **quinto término**, se le multiplica por 2 al término anterior así: $8 \times 2 = 16$

**Ejemplo:**

En la producción de bacterias el primer día ingresa una bacteria y se deja en observación, en el segundo día se visualiza y hay 2 bacterias, en el tercer día ya se observan 4 bacterias, en el cuarto día se observan 8. ¿Cuántas bacterias habrá en el quinto día?

Los números 1; 2; 4; 8 son términos de la sucesión dada. La forma de representar los términos de una progresión es principalmente con la letra a, entonces en esta sucesión.

$$a_1 = 1;\ \ a_2 = 2;\ \ a_3 = 4;\ \ a_4 = 8$$

## Razón

El factor fijo que multiplica a cada término de la sucesión para obtener el siguiente, se le denomina razón y se representa con la letra r, en este ejemplo la razón es 2 ya que se multiplica por 2.

$$\boxed{r = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Donde:

$r$ : es la razón

$n$ : es el lugar que ocupa el término enésimo

$a_n$: es el término anterior.

$a_{n-1}$: es el término posterior.

**Ejercicios resueltos:**

1) Determinar la razón de las siguientes progresiones geométricas

a) 1; 2; 4; 8; 16; …

| **Datos:** | **Solución:** |
|---|---|
| $a_1 = 1;$<br>$a_2 = 2;$<br>$a_3 = 4;$ | $r = \frac{a_2}{a_1}$<br>$r = \frac{2}{1}$<br>$r = 2$ |

b) 81; 27; 9; 3; 1;…

| **Datos:** | **Solución:** |
|---|---|
| $a_1 = 81;$<br>$a_2 = 27;$<br>$a_3 = 9;$ | $r = \frac{a_2}{a_1}$<br>$r = \frac{27}{81}$ |

| | |
|---|---|
| | $r = \frac{1}{3}$ |

## Término General

El término general de una progresión geométrica es una fórmula que permite hallar cualquier término de la sucesión.

$$\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$$

Donde:

$a_n$: es el término enésimo

$a_1$: es el primer término

$r$ : es la razón

$n$ : es el lugar que ocupa el término enésimo

**Ejemplo:**

Si se conoce el primer término de una progresión geométrica $a_1 = 1$ y la razón $r = 2$, hallar el término general y el Quito término de la progresión.

**Paso 1:** Extraer los datos del ejercicio:

| **Datos:** | **Incógnitas:** |
|---|---|
| $a_1 = 1$ | $a_n = ??$ |
| $r = 2$ | $a_5 = ??$ |

**Paso 2:** Se reemplaza los datos en la fórmula, así:

$$a_n = \boldsymbol{a_1}(\boldsymbol{r})^{n-1};$$

$$a_n = (2)^{n-1}$$

**Paso 3:** Para encontrar el quinto término "$a_5$", se remplaza n por el número 5 así:

$$a_5 = 1(2)^{5-1};$$

$$a_5 = 2^4;$$

$$a_5 = 16$$

## Ejercicios resueltos:

Escribir el término general de las siguientes progresiones geométricas

a) 4; 12; 36; 108; …

| Datos: | Solución: |
|---|---|
| $a_1 = 4;$<br>$r = 3$ | $a_n = a_1 \cdot r^{n-1};$<br>$a_n = 4(3)^{n-1}$ |

b) 8; 16; 32; 64;…

| Datos: | Solución: |
|---|---|
| $a_1 = 8;$<br>$r = 2$ | $a_n = a_1 \cdot r^{n-1};$<br>$a_n = 8(2)^{n-1}$ |

**A partir de la ecuación del término general se puede obtener cualquier término de la progresión incluyendo el primer término.**

## Suma de términos

Existen progresiones que tienen un gran número de términos y sería difícil calcular la suma de manera directa de *n* primeros términos, por lo que podemos usar las siguientes expresiones:

| Conociendo el término enésimo | Sin conocer el término enésimo |
|---|---|
| $\boldsymbol{S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}}$ | $\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}}$ |
| **Sn:** Suma de términos de la progresión<br>**r: razón geométrica**<br>$\boldsymbol{a_1}$: primer término<br>$\boldsymbol{a_n}$: último término | **Sn:** Suma de términos de la progresión<br>**r : razón geométrica**<br>$\boldsymbol{a_1}$: primer término<br>**n:** número de términos |

Pero en varios ejercicios de progresiones geométricas, es posible determinar la suma de los términos de manera fácil y directa, sin la necesidad de utilizar la fórmula.

Si la progresión es: 1; 2; 4; 8; 16

La suma es: 1+2+4+8+16=31

**Ejemplo 1.** En la sucesión anterior 1; 2; 4; 8; 16, calcular la suma de los 5 primeros términos mediante la fórmula.

| **Datos:** | **Solución:** |
|---|---|
| $a_1 = 1;$<br>$a_n = 16;$<br>$n = 5$<br>r = 2 | $S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$<br>$S = \frac{1(2^5 - 1)}{2 - 1}$<br>$Sn = \frac{31}{1}$<br>$Sn = 31$ |

**Ejemplo 2.** Hallar la suma de los 8 primeros términos de la progresión geométrica: 3; 6; 12; 24; 48;…

**Solución:** Hay dos maneras:

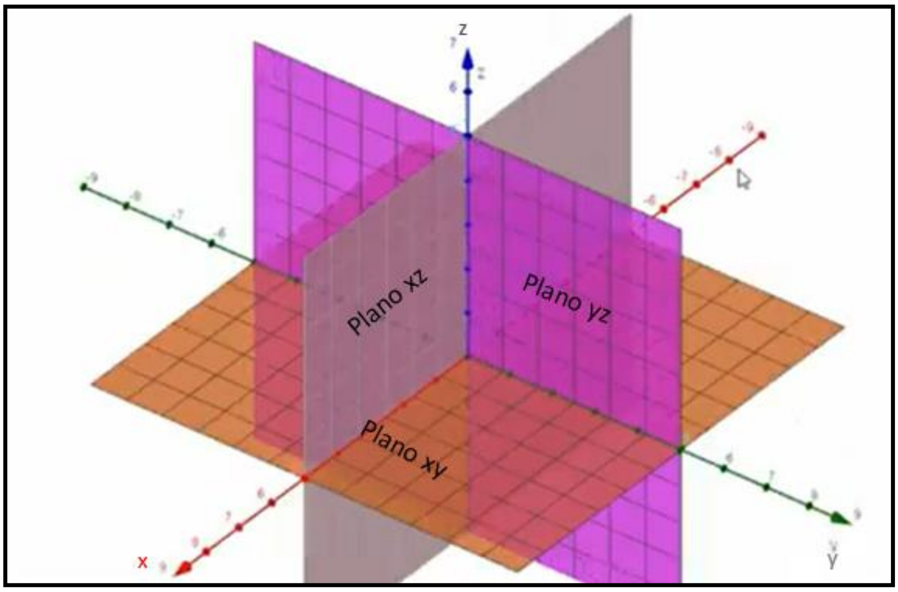
1. **Utilizar la fórmula sin conconer el término enésimo, ya que no se conoce el octavo término.**

| Datos | Sumatoria |
|---|---|
| $\boldsymbol{a_1 = 3};$<br>$\boldsymbol{n = 8};$<br>$\boldsymbol{r = 2};$ | $S = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$<br>$S = \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1}$<br>$Sn = \frac{3(255)}{1}$<br>$Sn = 765$ |

# Plano cartesiano en tres dimensiones

**Definición:**

El plano cartesiano en $\mathbb{R}^3$, es un espacio vectorial compuesto de tres dimensiones ortogonales entre sí, y donde los escalares de cada dimensión son




**Descripción:** Plano cartesiano en $\mathbb{R}^3$. Fig. 1

**Fuente:** Página web (2023)

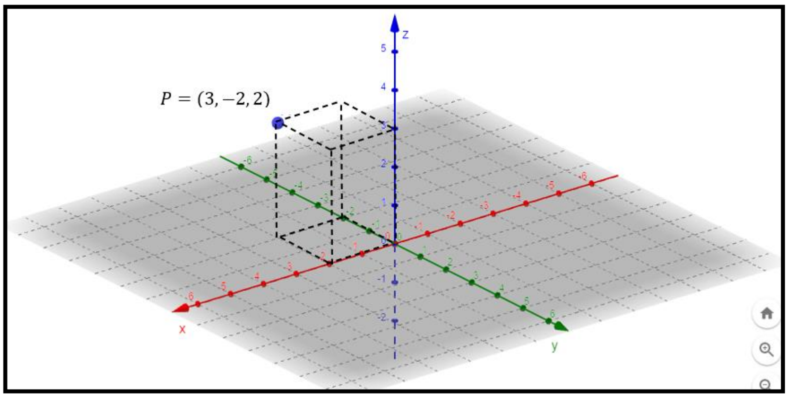
Un punto en el espacio se representa con tres coordenadas P (x, y, z)
En tres dimensiones, definimos los planos de coordenadas mediante los ejes de coordenadas, por lo que hay tres pares de ejes que se cruzan. Cada par de ejes forman un plano de coordenadas: $\boldsymbol{xy}$; $\boldsymbol{xz}$ y $\boldsymbol{yz}$ (Fig. 1)

**Ejemplo:**

1. Representar gráficamente el punto $P(2, -2, 3)$ en el plano $\mathbb{R}^3$

**Solución:**

Para ubicar el punto $P(2, -2, 3)$ en el plano $\mathbb{R}^3$, primero se recorre 2 unidades en el eje $\boldsymbol{x}$ positivo $(x = 2)$, luego 2 en el eje $\boldsymbol{y}$ negativo $(y = -2)$ y por último 3 unidades en el eje $\boldsymbol{z}$ $(z = 3)$, dirigiendo segmentos paralelos a cada eje hasta que se intercepten entre sí. (Fig. 2)




**Descripción:** Gráfica del $P = (2, -2, 3)$ en $\mathbb{R}^3$. Fig. 2

**Elaborado por:** Pachacama, M. (2023)

MAGNITUDES: Es todo aquello que puede ser medido, se puede representar por un número, además pueden ser estudiados en las ciencias experimentales.

**ESCALAR**

Se define únicamente por su valor numérico en un sistema de unidades.

EJEMPLOS:

- Longitud: 20m
- Tiempo: 8 min.

**VECTORIAL**

Se define mediante su valor numérico, dirección y sentido, en un sistema de unidades.

EJEMPLOS:

- Velocidad: $\frac{30m}{s}, S60°O$
- Desplazamiento: 20 m al norte.

**Descripción:** Magnitudes. Escalares y vectoriales.

**Elaborado por:** Pachacama, M. (2023)

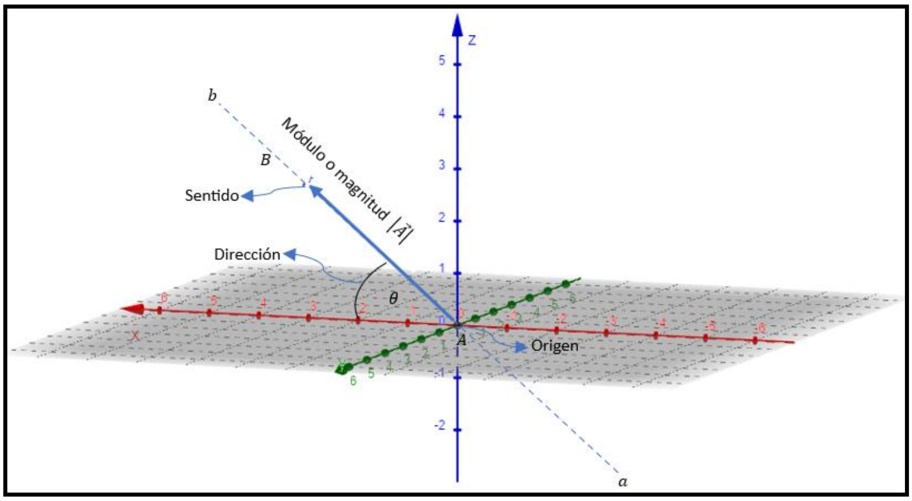
## Vectores

Las magnitudes vectoriales se representan gráficamente con segmentos dirigidos, llamados vectores.

Un vector queda definido por: su origen el punto A y su extremo el punto B.

La ***recta ab*** a lo largo de la cual está dirigida el vector, se llama ***línea acción del vector***.

Los vectores se representan con una letra mayúscula y una flecha en la parte superior. (Fig. 3)




**Descripción:** Elementos del vector. Fig. 3

**Elaborado por:** Pachacama, M. (2023)

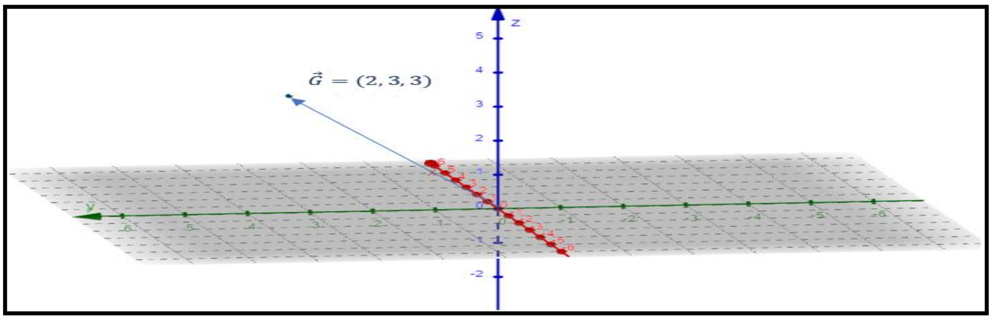
### Elementos del vector:

Módulo o magnitud: Longitud representada en una escala (valor numérico).
Dirección: Ángulo que forma el vector con el eje x en sentido antihorario.
Sentido: Flecha o saeta del vector.

## Vectores en $\mathbb{R}^3$

El vector en $\mathbb{R}^3$es un segmento dirigido en el espacio que tiene componentes x, y, z; se lo representa con una letra mayúscula con una flecha en la parte superior y tiene módulo, dirección y sentido.

**Representación gráfica del vector $\vec{G} = (2, 3, 3)$**




**Descripción:** Gráfica del vector $\vec{G} = (2, 3, 3)$ en $\mathbb{R}^3$

**Elaborado por:** Pachacama, M. (2023)

## Módulo de vectores $\mathbb{R}^3$

Sea $\vec{A} = (x, y, z)$. La magnitud o módulo del vector $\vec{A}$, se denotada como $|\vec{A}|$ y se define como:

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ejemplos:

1. Hallar el módulo del vector $\vec{A} = (3, 3, 2)$

   Solución:

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (2)^2}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{9 + 9 + 4}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{22}$$

$$|\vec{A}| = 4{,}69$$

2. Hallar el módulo del vector $\vec{B} = (-2, 3,\ 2)$
   Solución:

$$|\vec{B}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (2)^2}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{4 + 9 + 4}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{25}$$

$$|\vec{B}| = 5{,}00$$

## Operaciones entre vectores $\mathbb{R}^3$

### Suma de vectores:

Para sumar algebraicamente dos vectores en $R_3$, se suman componente a componente si las coordenadas de $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2\ )$.

Entonces:

$$\vec{A} + \vec{B} = \ [(x_1 + x_2), (y_1 + y_2), (z_1 + z_2)]$$

**Ejemplos:**

1. Dados los vectores: $\vec{A} = (3, 3, 2)$ y $\vec{B} = (-2, -3,\ 2)$
   Hallar la suma de $\vec{A} + \vec{B}$

   Solución:

$$\begin{array}{rl} \vec{A} & = (\ 3, \quad 3, \quad 2) \\ +\vec{B} & = (-2, \quad -3, \quad 2) \\ \hline \vec{A} + \vec{B} & = (1, \quad 0, \quad 4) \end{array}$$

2. Dados los vectores: $\vec{C} = (-5, 2, -4)$ y $\vec{D} = (-3, 7, -3)$
Hallar la suma de $\vec{C} + \vec{D}$

Solución:

$$\begin{array}{rl} \vec{C} & = (-5, \quad 2, \quad -4) \\ +\vec{D} & = (-3, \quad 7, \quad -3) \\ \hline \vec{C} + \vec{D} & = (-8, \quad 9, \quad -7) \end{array}$$

## Resta de vectores

La diferencia de vectores es un caso particular de la suma de vectores. Se define como la suma de un vector con el negativo del otro.

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

La diferencia de vectores no cumple la propiedad conmutativa.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{B} \neq \vec{A}$$

**Ejemplos:**

1. Dados los vectores: $\vec{A} = (3, 3, 2)$ y $\vec{B} = (-2, -3, \ 2)$
Hallar la resta de $\vec{A} - \vec{B}$
Solución:

$$\begin{array}{rl} \vec{A} & = (3, \quad 3, \quad 2) \\ -\vec{B} & = (2, \quad 3, \quad -2) \\ \hline \vec{A} - \vec{B} & = (5, \quad 6, \quad 0) \end{array}$$

2. Dados los vectores: $\vec{C} = (-5, 2, -4)$ y $\vec{D} = (-3, 7, -3)$
Hallar la resta de $\vec{C} - \vec{D}$
Solución:

$$\begin{array}{rl} \vec{C} & = (-5, \quad 2, \quad -4) \\ -\vec{D} & = (3, \quad -7, \quad +3) \\ \hline \vec{C} - \vec{D} & = (-2, \quad 5, \quad -1) \end{array}$$

# Producto escalar en $\mathbb{R}^3$

El producto escalar también es conocido como producto punto $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y al realizar el producto escalar entre dos vectores da como resultado un número.

Para hallar el producto escalar se presentan dos casos:

**Caso 1:**

El producto escalar de los vectores $\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$de $\mathbb{R}^3$ es $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y es igual a la suma de los productos de sus respectivas componentes, las mismas que son elementos de los números reales.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$$

Cuando se combinan dos vectores utilizando el producto escalar, el resultado es un escalar. Por esta razón, el nombre de producto escalar. El resultado del producto escalar indica acerca de qué tanto apuntan dos vectores en la misma dirección.

**Propiedades:**
Las propiedades del producto escalar son:

| N | Fórmulas | Propiedades |
|---|---|---|
| **1** | $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ | Conmutativa |
| **2** | $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$ | Distributiva con relación a la suma de vectores. |
| **3** | $c(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (c\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(c\vec{B})$ | Asociativa |
| **4** | $\vec{A}\cdot\vec{A} = \lvert\vec{A}\rvert^2$ | De la Magnitud |

**Ejemplos:**

1. Sean los vectores $\mathbb{R}^3$: $\vec{A} = (3, 6, 7)$ y $\vec{B} = (4, 2, -1)$.
   Calcular el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$

   Solución:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (3, 6, 7)\cdot(4, 2, -1)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 3(4) + 6(2) + 7(-1)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 12 + 12 - 7$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 24 - 7$$

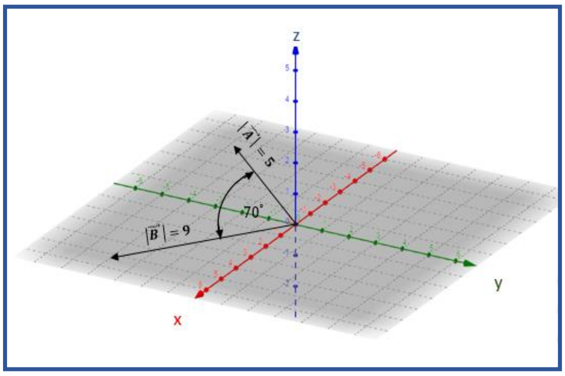
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 17$$

**Respuesta:** $\vec{A} \cdot \vec{B} = 15$

**Caso 2:** Teniendo como datos los módulos de los vectores y el ángulo formado entre los vectores, se resuelve multiplicando los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman los vectores.

$$\boldsymbol{\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot cos\theta}$$

**Ejemplos:**

<table>
<tr><td colspan="3">1. Dados los módulos de los vectores $|\vec{A}| = \mathbf{5}$ y $|\vec{B}| = \mathbf{9}$ y el ángulo que se forma entre los dos vectores es $70^{\circ}$. Hallar el producto escalar.</td></tr>
<tr><td>

Descripción: Gráfica de los módulos de los vectores y su ángulo<br><br>Elaborado por: Pachacama, M. (2023)</td>
<td>Datos:<br><br>$|\vec{A}| = 5m$<br><br>$|\vec{B}| = 9m$<br><br>$\theta = 70^{\circ}$</td>
<td>Solución:<br><br>$\boldsymbol{\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot cos\theta}$<br><br>Reemplazamos valores:<br><br>$\vec{A} \cdot \vec{B} = (5)(9) \cdot cos35^{\circ}$<br><br>$\vec{A} \cdot \vec{B} = (45)(0{,}34)$<br><br>$\vec{A} \cdot \vec{B} = 15{,}3$</td></tr>
</table>

**Producto vectorial $(\vec{A} \times \vec{B})$**

El producto vectorial o producto cruz de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, es otro vector $\vec{C}$. El resultado del producto vectorial indica las coordenadas de un vector perpendicular a ambos vectores. Además, el módulo o magnitud del vector resultante $\vec{C}$ en el producto vectorial es el área del paralelogramo que definen estos vectores.

**Propiedades:**

Las propiedades del producto vectorial son:

| N | Fórmula | Propiedades |
|---|---|---|
| **1** | $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$ | No Conmutativa |
| **2** | $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ | Distributiva con relación a la suma de vectores. |
| **3** | $c(\vec{A} \times \vec{B}) = (c\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (c\vec{B})$ | Asociativa |
| **4** | $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ | Simetría alternada |

Ejemplos:

1. Dados los vectores: $\vec{A} = (3, 5, -4)$ y $\vec{B} = (2, -6, 5)$. Determinar el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.

   Solución:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = [(5)(5) - (-6)(-4)]i - [(3)(5) - (2)(-4)]j + [(3)(-6) - (2)(5)]k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = [25 - (24)]i - [15 - (-8)]j + [-18 - 10]k;$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = [25 - 24]i - [15 + 8]j + [-18 - 10]k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = 1i - 23j + (-28)k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (1i - 23j - 28k)u^2$$

## Definición de límite

Se define el límite de una función $f(x)$ a un valor *L* cuando ***x*** se aproxima o se acerca a un valor ***a*** se lo representa como:

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ | Límite de $f(x)$ cuando ***x*** tiende hacia ***a*** es igual a L |

Se aplica el cálculo de límites cuando se desea conocer el comportamiento de la variable independiente de una función al aproximarse a cierto valor.

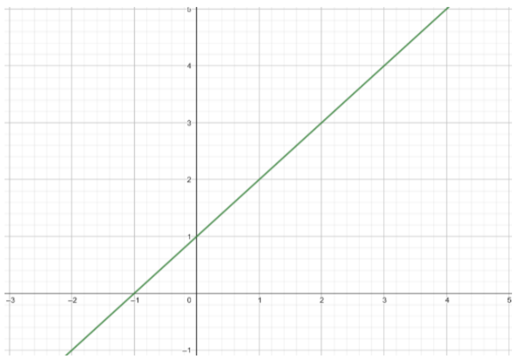
**Ejemplo:**

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to 1}(x + 6) = 7$ | Límite de $(x + 6)$ cuando ***x*** tiende hacia ***1*** es igual a 7 |

Dada una función $f(x)$ y su correspondiente gráfica se define al límite de dicha función de la siguiente manera:

Partiendo de la gráfica de la función $f(x) = x + 1$

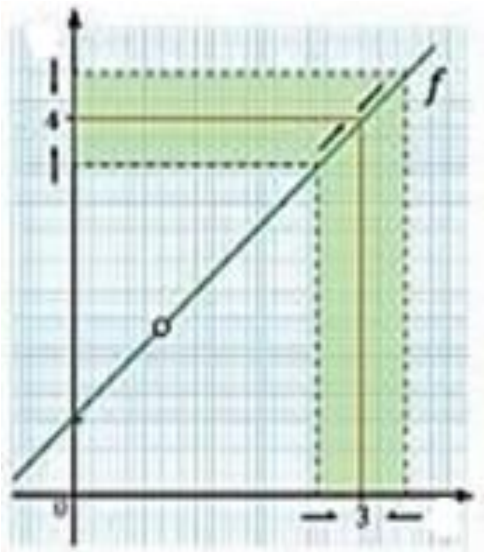
Se desea obtener el límite de la función en cierto punto de la misma, en este caso para **x=3**



**Descripción:** Gráfica de la función f(x)= x+1
**Elaborado por:** Valencia F.

Si se elabora una tabla en la que damos a la variable x, valores menores a 3 pero cercanos a 3, se tendría:

| x | F(x) |
|---|---|
| 2,9 | 3,9 |
| 2,99 | 3,99 |
| 2,999 | 3,999 |
| … | … |

<table>
<tr><td>Si después, se elabora otra tabla, asignando a la variable x valores cercanos a 3 pero mayores a 3 se obtendrá:</td><td>
<table><tr><th>x</th><th>F(x)</th></tr><tr><td>3,1</td><td>4,1</td></tr><tr><td>3,01</td><td>4,01</td></tr><tr><td>3,001</td><td>4,001</td></tr><tr><td>…</td><td>…</td></tr></table>
</td></tr>
<tr><td>Se puede observar que en ambos casos las imágenes de f(x) se encuentran en torno a 4.</td><td>

Descripción: Gráfica del límite de la función f(x) cuando x tiende a 3<br>Elaborado por: MINEDUC (2018)</td></tr>
<tr><td>Entonces se puede decir que el límite de la función f(x)=x+1 cuando x tiende a 3 es 4.</td><td>$\lim_{x\to 3}(x+1) = 4$</td></tr>
</table>

## Propiedades de los límites:

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen; entonces, se pueden aplicar las siguientes propiedades, para el cálculo de límites:

<table>
<tr><th colspan="2">Propiedades de los Límites</th></tr>
<tr><td>Si $f(x)$ se trata de una función constante el límite de la función es la misma constante.</td><td>$\lim_{x\to a} c = c$<br><br>$\lim_{x\to 5} 8 = 8$</td></tr>
<tr><td>Límite de una potencia: Para cualquier entero positivo n el límite</td><td>$\lim_{x\to a} x^n = a^n$</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| de la función $f(x) = x^n$se define como el valor de a elevado a **n** | $\lim_{x \to 5} x^2 = 5^2$ |
| El límite **de la suma o resta de dos funciones** se expresa como la suma o resta de los límites de cada **función por separado.** | $\mathbf{Lim}_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ <br> $\operatorname{Lim}_{x\to 4}\left[5x^2 + 8x\right] = \lim_{x\to 4} 5x^2 + \lim_{x\to 4} 8x$ <br> $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$ <br> $\operatorname{Lim}_{x\to 4}\left[4x^3 - 9x\right] = \lim_{x\to 4} 4x^3 - \lim_{x\to 4} 9x$ |
| El límite del **producto de 2 funciones** se expresa como el producto de los límites de cada **función por separado.** | $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$ <br> $\lim_{x\to 2}[9x^4 \cdot 7x] = \lim_{x\to 2} 9x^4 \cdot \lim_{x\to 2} 7x$ |
| El límite del cociente de 2 funciones se expresa como el límite de la función del numerador sobre el límite de la función del denominador siempre y cuando la función del denominador sea diferente de 0 | $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)};\ si, \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ <br> $\lim_{x\to 3}\left[\frac{5x+2}{4x-1}\right] = \frac{\lim_{x\to 3}(5x+2)}{\lim_{x\to 3}(4x-1)};\ si, \lim_{x\to 3} 4x-1 \neq 0$ |
| El límite del producto de una constante por una función se expresa como el valor constante fuera del límite y el límite de la función | $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$; **donde c es una constante** <br> $\lim_{x\to 3}[5(4x+2)] = 5 \lim_{x\to 3}(4x+2)$; **donde 5 es el valor constante** |

## Estimación del límite aplicando propiedades:

Para determinar el límite de una función se aplican las propiedades mencionadas, una vez realizado este procedimiento se procede a reemplazar el valor de a del límite en lugar de la variable x se realizan las operaciones y se obtiene el valor del límite de la función dada.

**Ejemplo 1:** Determinar $\lim_{x\to -3}(x^2 + x - 6)$ aplicando las propiedades:

| Explicación | Solución |
|---|---|
| | |

| | |
|---|---|
| Propiedad de límites de **suma y resta** | $\lim_{x\to -3}(x^2+x-6) = \lim_{x\to -3} x^2 + \lim_{x\to -3} x - \lim_{x\to -3} 6$ |
| Propiedad del límite de una potencia<br>**Reemplazar el valor de -3 en lugar de x**<br>Propiedad del límite de una constante. | $\lim_{x\to -3}(x^2+x-6) = (-3)^2 + (-3) - 6$ |
| Realizar las operaciones de suma y resta algebraica de enteros. | $\lim_{x\to -3}(x^2+x-6) = 9 + (-3) - 6$ |
| Respuesta | $\lim_{x\to -3}(x^2+x-6) = 0$ |

**Ejemplo 2:** Determinar $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6}{x}$ aplicando las propiedades:

| Explicación | Solución |
|---|---|
| Propiedad de límites de un cociente de funciones | $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6}{x} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^2-6)}{\lim_{x\to 2} x}$ |
| Propiedad de límite de suma y resta. | $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6}{x} = \frac{\lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 6}{\lim_{x\to 2} x}$ |
| Propiedad del límite de una potencia.<br>Propiedad del límite de una constante.<br>**Reemplazar de valor de 2 en lugar de x** | $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6}{x} = \frac{2^2-6}{2}$ |
| Realizar las operaciones de suma y resta algebraica de enteros. | $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6}{x} = \frac{4-6}{2}$ |
| Simplificar | $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6}{x} = -\frac{2}{2} = -1$ |

## Concepto de infinito

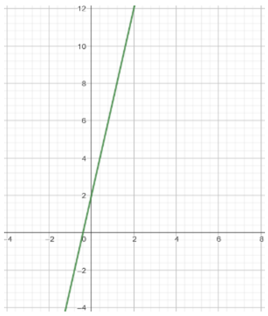
"El término infinito en matemáticas hace referencia a aquello que no tiene fin o límite. Por ejemplo, los números son considerados infinitos pues se trata de una sucesión que no tiene límite" se lo representa con el signo $\infty$.

**Ejemplos:**

Los números naturales $\{1,2,3 \ldots\ldots 1000000 \ldots .$

Una función lineal que no tiene definido su final.

$$y = 5x + 2$$



**Descripción:** gráfica de la función y=5x+2
**Realizado por:** Valencia, F. (2023)

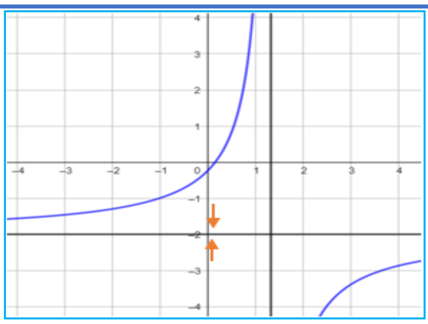
La función es infinita ya que se le puede asignar cualquier valor a x y se obtendrá el correspondiente valor en y.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 2 | 12 |
| 10 | 17 |
| 500 | 2502 |
| … | … |

## Estimación del límite con valores que tienden al infinito:

En ocasiones interesa estudiar el límite de una función cuando la variable "x" toma valores cada vez mayores o cada vez menores.

Considere la función: $f(x) = \frac{-6x+1}{3x-4}$ obtenemos la siguiente tabla de valores con su respectiva gráfica.



**Descripción:** gráfica de la función cuando x tiende a $\infty$
**Realizado por:** Cevallos, M. (2022)

| x | F(x) |
|---|---|
| 100 | -2,023648649 |
| 1 000 | -2,002336449 |
| 10 000 | -2,000233364 |
| … | … |

De la observación de su gráfica, o mediante el cálculo de valores de la imagen, se deduce que, para valores de x cada vez mayores, las imágenes f(x) se aproximan cada vez más a -2, y de la misma manera, para valores de x cada vez menores, las imágenes f(x) se aproximan también a -2; por lo tanto, decimos que el límite de la función f(x) cuando x tiende a más infinito, o a menos infinito es -2 y lo representamos así:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$$

## Operaciones de límites hacia el infinito:

El infinito cumple con las siguientes operaciones:

Si; $a \in \mathbb{R}$, entonces:

1) $\infty \pm a = \infty;$
2) $\infty \cdot a = \infty;$
3) $\infty \cdot (-a) = -\infty;$
4) $\frac{a}{\infty} = 0;$
5) $\frac{\infty}{a} = \infty;$ si $a \neq 0$
6) $\infty \cdot \infty = \infty;$
7) $\infty(-\infty) = \infty;$
8) $\infty + \infty = \infty;$
9) $\infty^n = \infty;$
10) $\sqrt{\infty} = \infty$
11) $\infty - \infty = ind;$
12) $\frac{\infty}{\infty} = ind;$

**Observación:**

En el caso de límites el valor de infinito se lo considera como un número y para encontrar límites de este tipo se aplican las propiedades dadas.

Para resolver un límite al infinito en funciones polinómicas, debemos sustituir la x por el infinito solamente en el término de mayor grado de la función y realizar las operaciones correspondientes aplicando las propiedades.

**Ejemplo 1:** Determinar el límite de la función $f(x) = 4x + 5$ cuando la x tiende al infinito

| Explicación | Solución |
|---|---|
| Propiedad de límites: $\infty \cdot a = \infty;$ | $\lim_{x\to+\infty}(4x+5) = (4 \cdot \infty + 5)$ |
| Propiedad de límites: $\infty \pm a = \infty;$ | $\lim_{x\to+\infty}(4x+5) = \infty + 5$ |
| Respuesta. | $\lim_{x\to+\infty}(4x+5) = \infty$ |

**Ejemplo 2:** Determinar el límite de la función $f(x) = x^2 + 1$ cuando la x tiende al infinito

| Solución | Explicación |
|---|---|
| Reemplazar el valor del infinito en el término de mayor grado.<br>Propiedad de límites: $\infty^2 = \infty;$ | $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1) = (\infty^2 + 1)$ |
| Propiedad de límites: $\infty + 1 = \infty;$ | $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1) = (\infty + 1)$ |
| Respuesta: | $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1) = \infty$ |

**Ejemplo 3:** Determinar el límite de la función $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ cuando la x tiende al infinito

| Explicación | Solución |
|---|---|
| | |

| | |
|---|---|
| Límite de un cociente.<br><br>Reemplazar el valor de x por ∞ | $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{\lim_{x\to\infty} 2}{\lim_{x\to\infty} (x+1)^2}$ |
| Propiedades de una constante:<br>$\lim_{x\to\infty} 2 = 2$<br><br>Propiedades de los límites<br><br>$\infty + 1 = \infty$ | $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{(\infty+1)^2}$ |
| Propiedad de límites: $(\infty)^2 = \infty$; | $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{(\infty)^2}$ |
| Propiedad de límites:<br><br>$\frac{2}{\infty} = 0$; | $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{\infty}$ |
| Respuesta | $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{(x+1)^2} = 0$ |

## Indeterminación

Los límites indeterminados (o indeterminaciones) no, indican que el límite no exista, sino que no se puede anticipar el resultado.

Se tendrán que hacer operaciones adicionales para eliminar la indeterminación y averiguar entonces el valor del límite (en el caso de que exista). Ese valor puede ser un número finito, incluido el cero, o $+\infty$ o $-\infty$.

Aparecen indeterminaciones cuando, al sustituir la variable $\boldsymbol{x}$ de la expresión por el valor del límite al que tiende ésta, se convierte en uno de los casos siguientes:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ \infty-\infty$$

Esto es una indeterminación, e implica que para poder resolver el límite primero hay que "levantar la indeterminación" aplicando algún mecanismo o técnica para expresar la función de diferente manera y, posterior a eso poder aplicar propiedades de los límites.

**Límites indeterminados cero entre cero $\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)$**

**Técnicas para levantar una indeterminación:**

Existen varias técnicas para levantar una indeterminación, a continuación, se estudiará dos de ellas:

**Levantar indeterminación usando factorización:**

Si al resolver un límite aplicando propiedades llegamos a la indeterminación $\frac{0}{0}$ se puede usar cualquiera de los casos de factoreo, para levantar la indeterminación.

**Ejemplos:**

1. Determinar el $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-6x}{x^2-x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-6x}{x^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-6x}{x^2-x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-6x}{x^2-x}=\frac{0^2-6(0)}{(0)^2-0};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-6x}{x^2-x}=\frac{0}{0};$$

Como se puede observar se ha llegado a una indeterminación; por lo tanto, se debe factorizar la función $f(x)=\frac{x^2-6x}{x^2-x}$ para expresarla de una manera equivalente:

Aplicando el caso de factoreo denominado "*factor común*" en el numerador y denominador se obtiene:

$$\frac{x^2-6x}{x^2-x}=\frac{\cancel{x}(x-6)}{\cancel{x}(x-1)}$$

$$\frac{x^2 - 6x}{x^2 - x} = \frac{x-6}{x-1}$$

Por lo tanto, sustituyendo para resolver el límite:

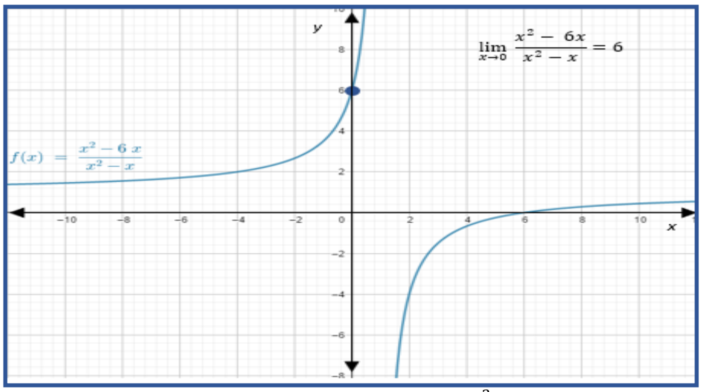
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-6}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - x} = \frac{0-6}{0-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - x} = \frac{-6}{-1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - x} = 6$$

**Representación gráfica**




**Descripción:** Gráfica de $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - x} = 6$

**Elaborado por:** Pachacama, M. (2023)

2. Determinar el $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(3)^2 - 9}{3 - 3}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{9 - 9}{3 - 3}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0}$$

Como se puede observar se ha llegado a una indeterminación; por lo tanto, se va a factorarizar la función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, para expresarla de una manera equivalente:

Aplicando el caso de factorización "*diferencia de cuadrados"* en el numerador se obtiene:

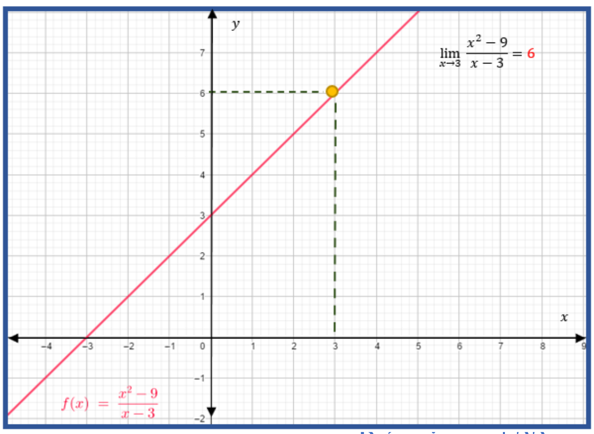
$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$$

Por lo tanto, sustituyendo para resolver el límite:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3} x + 3$$

**Representación gráfica**






**Descripción:** Gráfica de $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=3+3$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

3. Determinar el $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-2}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-2}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{(2)^2-2-2}{2-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{4-4}{2-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{0}{0}$$

Como se puede observar se ha llegado a una indeterminación; por lo tanto, se va a factorarizar la función $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$, para expresarla de una manera equivalente:

Aplicando el caso de factorización "*trinomio de la forma* $x^2+bx+c$ " en el numerador se obtiene:

$$\frac{x^2-x-2}{x-2}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}}$$

$$\frac{x^2-x-2}{x-2}=x+1$$

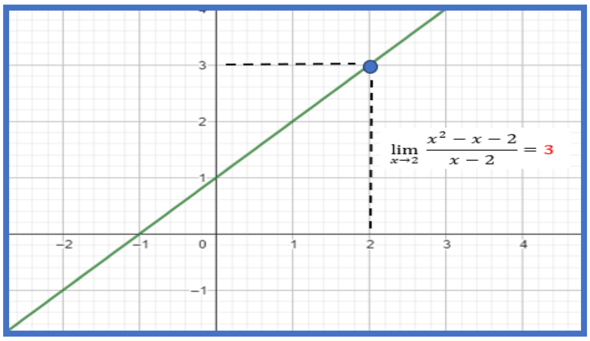
Por lo tanto, sustituyendo para resolver el límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\ x+1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=2+1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=3$$

**Representación gráfica**




**Descripción:** Gráfica de $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=3$

**Elaborado por:** Pachacama, M. (2023)

# DERIVACIÓN

**Introducción:**

El célebre matemático y físico ingles Isaac Newton (1642 – 1727) ha sido uno de los genios más grandes que han existido. Desarrolló la ciencia del Cálculo diferencial e integral bajo el nombre de *Fluxiones.* Aunque Newton descubrió y empleó la nueva ciencia desde 1670, su primera obra publicada que la exhibe está fechada en 1687, teniendo el título "Philosophiae Naturalis Principia Mathemática". Esta es la obra principal de Newton. De ella dijo Laplace: "Siempre permanecerá preeminente sobre todas las otras producciones de la mente humana"

**Incrementos:**

El incremento de una variable que pasa de un valor numérico a otro es la diferencia que se obtiene *restando* el valor inicial del valor final. Un incremento de $x$ se representa por el símbolo $\Delta x$. Es evidente que el incremento puede ser positivo o negativo, según que la variable aumente o disminuya al cambiar el valor.

**Ejemplos:**

$\Delta y$ = incremento de y ; $\Delta x$ = incremento de x **;** $\Delta f(x)$ = incremento de $f(x)$

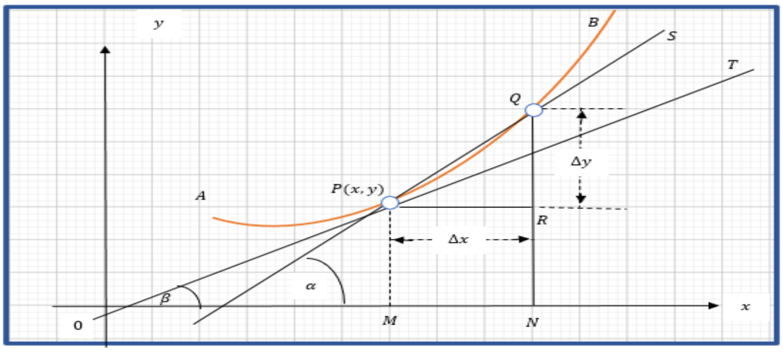
**Derivada de una función de una variable.**

La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando este tiende a cero. Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es derivable o que tiene derivada. La definición puede darse mediante símbolos, de la siguiente forma:

$$y = f(x)$$

## Interpretación geométrica de la derivada:

Ahora vamos a considerar un teorema que es fundamental en todas las aplicaciones del Cálculo diferencial a la Geometría.




**Descripción:** Interpretación geométrica de la derivada. Fig. 1
**Elaborado por:** Pachacama, M. (2023)

Primero es necesario recordar la definición de tangente a una curva en un punto P de la misma. Supongamos una secante que pasa por P y un punto próximo Q de la curva (Fig. 1). Hagamos que el punto Q se mueve sobre la curva aproximándose indefinidamente a P. La secante girará alrededor de P, y su posición límite es, por definición, la tangente a la curva en P. Consideremos ahora la gráfica de la función $f(x)$, o sea, la curva AB, dada la ecuación

$$y = f(x)$$

Si se tiene una función $y = f(x)$, a partir de ella se puede definir otra función $y' = f'(x)$ esta función encontrada se denomina ***derivada de la función***.

**Derivada por definición**

Para determinar la derivada de una función en un punto se puede aplicar la definición de la misma, es decir aplicando límites, se debe precisar que el límite de una función se define como la tendencia de esta (a qué valor se aproxima) cuando uno de sus parámetros (en este caso h) se acerca a un valor determinado:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**Ejemplos:**

1. Determinar la derivada de la siguiente función $f(x) = 3x + 5$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**Datos:**

$$x = (x + h)$$
$$f(x) = 3x + 5$$

**Solución:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h) + 5 - (3x + 5)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3x + 3h + 5 - 3x - 5}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3$$

$$f'(x) = 3$$

2. Hallar la derivada de la función: $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**Recordatorio:**

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

**Datos:**

$$x = (x+h)$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$$

**Solución:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^2 + 3(x+h) - 5 - (2x^2 + 3x - 5)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) + 3x + 3h - 5 - 2x^2 - 3x + 5}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 3x + 3h - 5 - 2x^2 - 3x + 5}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 3h}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h + 3)}{h}$$

0

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 4x + 2h + 3$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4x + 3$$

$$f'(x) = 4x + 3$$

3. Hallar la derivada de la función: $f(x) = -3x + 2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**Datos:**

$x = (x + h)$
$f(x) = -3x + 2$

**Solución:**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3(x+h) + 2 - (-3x + 2)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3\cancel{x} - 3h + \cancel{2} + 3\cancel{x} - \cancel{2}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3\cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -3$$

$$f'(x) = -3$$

## Propiedades para derivas de funciones algebraicas.

Se puede determinar la derivada de una función aplicando las siguientes reglas o propiedades que se han resumido en la siguiente tabla:

1. **La derivada de una constante** es cero.

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

Ejemplo:

$$\frac{d(2)}{dx} = 0$$

2. **La derivada de una variable con respecto a sí misma** es la unidad.

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

3. **La derivada de la suma algebraica de un número finito n de funciones** es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w}) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}}$$

**Ejemplo:**

$$\frac{d}{dx}(5\mathrm{x} + 3) = \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(3)$$

$$\frac{d}{dx}(5\mathrm{x} + 3) = 5\frac{d}{dx}(x) + 0$$

$$\frac{d}{dx}(5\mathrm{x} + 3) = 5$$

4. **La derivada de la potencia de una función de exponente constante** es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(v^n) = \mathrm{n} \cdot v^{n-1}$$

Ejemplo:

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4 \cdot x^{4-1}$$

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

5. **La derivada del producto de una constante por una función** es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{du}{dx}$$

**Ejemplo:**

$$\frac{d}{dx}(2x) = 2\frac{dx}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(2x) = 2$$

6. **La derivada de un producto de dos funciones es igual** al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda por la derivada de la primera.

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$$

**Ejemplo:**

Hallar la derivada de $y = (x^2)(2x^3 - 5x)$

$$\frac{d}{dx}(x^2)(2x^3 - 5x) = x^2 \cdot \frac{d}{dx}(2x^3 - 5x) + (2x^3 - 5x) \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)(2x^3 - 5x) = x^2\left[2\frac{d}{dx}(x^3) - 5\frac{dx}{dx}\right] + (2x^3 - 5x)(2x^{2-1})$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)(2x^3 - 5x) = x^2(6x^2 - 5) + (2x^3 - 5x)(2x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)(2x^3 - 5x) = (6x^4 - 5x^2) + (4x^4 - 10x^2)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)(2x^3 - 5x) = 6x^4 - 5x^2 + 4x^4 - 10x^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)(2x^3 - 5x) = 10x^4 - 15x^2$$

7. **La derivada de un cociente de funciones es igual** al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

**Ejemplo:**

Hallar la derivada de: $y = \left(\frac{x-5}{x+5}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-5}{x+5}\right) = \frac{(x+5)\frac{d}{dx}(x-5) - (x-5)\frac{d}{dx}(x+5)}{(x+5)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)=\frac{(x+5)\left[\left(\frac{dx}{dx}-\frac{d5}{dx}\right)-(x-5)\left(\frac{dx}{dx}+\frac{d5}{dx}\right)\right]}{(x+5)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)=\frac{(x+5)(1-0)-(x-5)(1+0)}{(x+5)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)=\frac{(x+5)-(x-5)}{(x+5)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)=\frac{x+5-x+5}{(x+5)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)=\frac{10}{x^2+10x+25}$$

8. La derivada de un logaritmo natural es igual

$$f\,(x)=\ln x$$
$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

9. La derivada del seno es igual al coseno

$$f\,(x)=\ senx$$
$$f'(x)=\cos x$$

10. La derivada del

$$f\,(x)=\cos x$$
$$f'(x)=-\text{sen}\,x$$

## Regla de la cadena:

La regla de la cadena es una fórmula que sirve para derivar funciones compuestas. La regla de la cadena establece que la derivada de una función compuesta $f\big(v(x)\big)$ es igual a la derivada $f'(v)$ multiplicada por la derivada $v'(x)$.

$$\frac{d}{dx}f\big(v(x)\big)=f'(v)\cdot v'(x)$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $y=(5x^2-4)^4$, aplicando la Regla de la Cadena.

**Solución:**

$$\boxed{\frac{d}{dx}(v^n) = \mathrm{n} \cdot v^{n-1}}$$

$\frac{d}{dx} f\big(v(x)\big) = f^{'}(v) \cdot v^{'}(x)$

$\frac{d}{dx} f(5x^2 - 4)^4 = \frac{d}{dx} f\big(v(x)\big)$

Se realiza las respectivas sustituciones:

$= (4v^3)10x$

$= 4(5x^2 - 4)^3 10x$

$= 40x(5x^2 - 4)^3$

$v(x) = 5x^2 - 4$ $\quad v^{'}(x) = 10x$

$f(v) = v^4$ $\quad f^{'}(v) = 4v^3$

Hallar la derivada de $y = lnx^2$, aplicando la Regla de la Cadena.

**Solución:**

$$\boxed{\frac{d}{dx}(v^n) = \mathrm{n} \cdot v^{n-1}}$$

$$\frac{d}{dx} f\big(v(x)\big) = f^{'}(v) \cdot v^{'}(x)$$

$\frac{d}{dx} f(lnx^2) = \frac{d}{dx} f\big(v(x)\big)$

Se realiza las respectivas sustituciones

$= 2x \cdot \frac{1}{v}$

$= 2x \cdot \frac{1}{x^2}$

$= \frac{2}{x}$

$v(x) = x^2$ $\quad v^{'}(x) = 2x$

$f(v) = lnv$ $\quad f^{'}(v) = \frac{1}{v}$

Para realizar este tipo de derivadas se realiza un cambio de variables para poder aplicar las derivadas directas.

## Introducción

Alguna vez se han preguntado si existe la derivada de otra derivada y se podrá calcular la derivada de esa nueva derivada, las nuevas derivadas obtenidas serán las mismas, las derivadas serán ilimitadas, el tema fue estudiado en el año 1671 por Isaac Newton quien estudió a la derivada de otra derivada y le denominó derivadas de orden superior, en donde la primera derivada sería de primer orden la segunda sería de segundo orden así sucesivamente.

## Derivadas de orden superior

**Definición**

Una función puede derivarse más de una vez, sabemos que la derivada de una función $f(x)$ es $f^{'}(x)$, a su vez podemos derivar la función $f^{'}(x)$, obteniendo otra función llamada **segunda**

**derivada** de $f$ con respecto a $x$ se denota como $f''(x)$ y se lee "$f$ doble prima de $x$". Así también la derivada de la segunda derivada se llama **tercera derivada** se escribe $f'''(x)$, continuando de esta manera obtenemos derivadas de orden superior hasta la *enésima derivada*.

Existen varios símbolos llamadas notaciones para representar las derivadas de orden superior. Cuando el orden es superior al tercero, no se usan primas en su representación.

| Notación de las derivadas de orden superior | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Nombre** | **Primera derivada** | **Segunda derivada** | **Tercera derivada** | **Cuarta derivada** |
| **Lagrange** | $y'$ | $y''$ | $y'''$ | $y^{(4)}$ |
| **Cauchy** | $D_x y$ | $D^2{}_x y$ | $D^3{}_x y$ | $D^4{}_x y$ |
| **Leibniz** | $\frac{dy}{dx}$ | $\frac{d^2y}{dx^2}$ | $\frac{d^3y}{dx^3}$ | $\frac{d^4y}{dx^4}$ |
| **Newton** | $\dot{y}$ | $\ddot{y}$ | $\dddot{y}$ | $\overset{(4)}{\frown}{y}$ |

**Nota:** El símbolo $\frac{d^2y}{dx^2}$ representa la segunda derivada de y. No es lo mismo que $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, que es el cuadrado de la primera derivada de y.

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

**Ejemplo 1:** Dada la función: $f(x) = x^6 + 2x^3 - 7x + 8.$

Hallar:

a. La primera derivada $f'(x)$
b. La segunda derivada $f''(x)$
c. La tercera derivada $(f'''(x))$

Solución:

a. P***rimera derivada*** aplicando las propiedades:

$$f'(x) = 6(x)^{6-1} + 3(2)(x^{3-1}) - 7(1)$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 6x^5 + 6x^2 - 7}$$

b. ***Segunda derivada*** aplicando las propiedades

$$f''(x) = 5(6)(x^{5-1}) + 6(2)(x^{2-1}) - 0$$

$$\boldsymbol{f''(x) = 30x^4 + 12x}$$

c. ***Tercera derivada*** aplicando las propiedades

$$f'''(x) = 4(30)(x^{4-1}) + 12$$

$$\boldsymbol{f'''(x) = 120x^3 + 12}$$

**Ejemplo 3:** Dada la función: $f(x) = -2x^5 + 3x^2 + 5x$.

Hallar la cuarta derivada.

**Solución:**

a. P***rimera derivada*** aplicando las propiedades:

$$f'(x) = -2(5)x^{5-1} + 3(2)x^{2-1} + 5(1)$$
$$f'(x) = -10x^4 + 6x + 5$$

b. ***Segunda derivada*** aplicando las propiedades

$$f''(x) = -10(4)x^{4-1} + 6(1)$$
$$f''(x) = -40x^3 + 6$$

c. ***Tercera derivada*** aplicando las propiedades

$$f'''(x) = -40(3)x^{3-1} + 0$$

$$f'''(x) = -120x^2$$

d. ***Cuarta derivada*** aplicando las propiedades

$$f''''(x) = -120(2)x^{2-1}$$
$$f''''(x) = -240x$$

**Ejemplo 4:** Dada la función: $h(x) = 5x^3 - 7x^2 - 8$.

Hallar la tercera derivada.

Solución:

a. Encontramos la primera derivada.

$$h'(x) = 5(3)x^{3-1} - 7(2)x^{2-1} - 0$$

$$\boldsymbol{h'(x) = 15x^2 - 14x}$$

b. Calcular la segunda derivada.

$$h'^{\prime(x)} = 15(2)x^{2-1} - 14x^{1-1}$$

$$h'^{\prime(x)} = 30x - 14x^0$$

$$\boldsymbol{h'^{\prime(x)} = 30x}$$

c. Encontrar la tercera derivada.

$$h'''(x) = 30x^{1-1}$$

$$h'''(x) = 30x^0$$

$$\boldsymbol{h'''(x) = 30}$$

## Evaluación de una derivada de orden superior

Para evaluar una derivada de orden superior en un determinado punto, se realiza el mismo procedimiento que se aplica en funciones reales en un punto dado.

**Ejemplo 1:** Sea la función: $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

a. Hallar la segunda derivada.
b. Evaluar cuando $x = 3$

**Solución:**

a. Encontramos la primera derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$$y = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$ Transformar el radical a índice

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$ Aplicar la propiedad de la potencia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cancel{2}}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(\cancel{2}x)$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

Hallamos la segunda derivada $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x\left[\frac{d}{dx}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}\right] + (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dx}{dx}$$ Aplicar la derivada del producto entre 2 funciones.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}-1}(2x) + (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 \cdot (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} + (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x^2+1)^3}}{(x^2+1)^2}$$

b. Evaluar cuando $x = 3$

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=3} = \frac{3^2\sqrt{3^2+1}+\sqrt{(3^2+1)^3}}{(3^2+1)^2}$ Reemplazamos x por 3

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=3} = \frac{9\sqrt{9+1}+\sqrt{(9+1)^3}}{(9+1)^2}$ Resolvemos las potencias

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=3} = \frac{9\sqrt{10}+\sqrt{(10)^3}}{(10)^2}$ Sumamos los números que se encuentran dentro del radical

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=3} = \frac{9\sqrt{10}+\sqrt{1000}}{100}$ Resolvemos las potencias

**Ejemplo 2:** Si y = f(x) = $f(x) = x^6 + 2x^3 - 7x + 8$ . Encontrar:

a. La segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2}$
b. Evaluar cuando x = -2.

Solución:

a. P***rimera derivada*** aplicando las propiedades:

$$f'(x) = 6(x)^{6-1} + 3(2)(x^{3-1}) - 7(1)$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 6x^5 + 6x^2 - 7}$$

***Segunda derivada*** aplicando las propiedades

$f''(x) = 5(6)(x^{5-1}) + 6(2)(x^{2-1}) - 0$

$\boldsymbol{f''(x) = 30x^4 + 12x}$

b. Evaluar cuando $x = -2$

$f''(5) = 30(-2)^4 + 12(-2)$ Reemplazamos x por 3

$f''(5) = 30(16) - 24$ Resolvemos las potencias.

$f''(5) = 480 - 24$ Realizamos la multiplicación.

$f''(5) = 456$ Restamos los números reales

## Integración

En el Cálculo diferencial aprendimos a calcular la derivada $f'(x)$ de una función dada $f(x)$, operación que se indica por:

$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x),$

O bien, si empleamos diferenciales, por:

$$df(x) = f'(x)dx$$

Los problemas del Cálculo integral dependen de la operación inversa, a saber:

Hallar una función $f(x)$ cuya derivada:

$$f'(x) = \phi(x)$$

Es conocida.

O bien, puesto que en el Cálculo integral es usual emplear diferenciales, podemos escribir:

$$df(x) = f'(x)dx = \phi(x)dx$$

Y enunciar el problema del Cálculo integral como sigue:

Dada la diferencial de una función, hallar la función

La función $f(x)$ dada que así se obtiene se llama una ***integral*** de la expresión diferencial dada; el procedimiento de hallarla se llama ***integración***; la operación se indica escribiendo el signo $\int$ delante de la expresión diferencial dada; así:

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

Se lee la integral de $f'(x)dx$ es igual a $f(x)$.

Donde:

- $\int$ = integral o integral de
- $dx$ = diferencial $x$, e indica que $x$ es la variable de integración.
- $f(x)$ = primitiva de $f'(x)$

Ejemplo:

1. Si $f(x) = x^4, entonces\ \ f'(x)dx = 4x^3dx, y$

$$\int 4x^3dx = x^4$$

2. Si $f(x) = sex, entonces\ \ f'(x)dx = cosx$, y

$$\int cosxdx = senx$$

Debe hacerse hincapié en el hecho de que, según las explicaciones anteriores:

La diferenciación (derivada) y la integración son operaciones inversas.

$$\int f'(x)\,dx = f(x)$$

## Constante de integración. Integral indefinida

La constante arbitraria C se llama *constante de integración* y es una cantidad independiente de la variable de integración. Puesto que podemos dar a C cuantos valores queramos, se sigue que, si una expresión diferencial dada tiene una integral, tiene una infinidad de integrales que difieren solo en constantes.

La integral indefinida busca obtener la primitiva de una función. Es decir, aquel cuya derivada es la función dada. Si una función $f(x)$tiene primitiva, tiene infinitas primitivas, diferenciándose todas ellas por *la constante C*

A la integral indefinida se representa por

$$\int \boldsymbol{f'(x)dx = f(x) + C}$$

Y puesto que **C** es desconocida e indefinida, la expresión:

$$f(x) + C$$

Se llama la ***integral indefinida*** de $f'(x)dx$

## Propiedades de la integral:

Las dos reglas siguientes son útiles para la reducción de expresiones diferenciales a integrales inmediatas:

a) La integral de una suma algebraica de expresiones diferenciales es igual a la misma suma algebraica de las integrales de esas expresiones:

$$\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$$

b) Un factor constante puede escribirse o delante del signo integral o después de él:

$$\int adv = a \int dv$$

A causa de la importancia de estas dos reglas, las escribiremos como fórmulas al principio de la lista de "integrales inmediatas" o "fórmulas elementales ordinarias"

## INTEGRALES INMEDIATAS

1. $\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$

2. $\int adv = a \int dv$
3. $\int dx = x + C$
4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
5. $\int \frac{dx}{x} = lnx + C$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\ x} + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$
8. $\int sen\ x\ dx = -\ cos\ x + C$
9. $\int cos\ x\ dx = sen\ x + C$
10. $\int sec^2\ x\ dx = \tan x + C$

## Ejercicios Resueltos

**1. Calcular la derivada de:**

$$\int 6xdx = 6 \int xdx$$

$$\int 6xdx = 6\frac{x^{1+1}}{1+1} + C$$

$$\int 6xdx = 6\frac{x^2}{2} + C$$

$$\int 5xdx = 3x^2 + C$$

**2. Hallar la derivada de:**

$$\int (5x-6)dx = 5\int xdx - 6\int dx$$

$$\int (5x-6)dx = 5\frac{x^{1+1}}{1+1} - 6x + C$$

$$\int (5x-6)dx = 5\frac{x^2}{2} - 6x + C$$

**3. Calcular la integral de:**

$$\int (2x^3 + 5x - 6)dx = \int 2x^3 dx + \int 5xdx - \int 6dx$$

$$\int (2x^3 + 5x - 6)dx = 2\int x^3 dx + 5\int xdx - 6\int dx$$

$$\int (2x^3 + 5x - 6)dx = 2\frac{x^{3+1}}{3+1} + 5\frac{x^{1+1}}{1+1} - 6x + C$$

$$\int (2x^3 + 5x - 6)dx = 2\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^2}{2} - 6x + C$$

$$\int (2x^3 + 5x - 6)dx = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^2}{2} - 6x + C$$

**4. Encontrar la integral de:**

$$\int x^7 dx = \frac{x^{7+1}}{7+1}$$

$$\int x^7 dx = \frac{x^8}{8}$$

**5. Hallar la integral de:**

$$\int 8\sqrt[3]{x^2}dx = 8\int x^{\frac{2}{3}}dx$$

$$\int 8\sqrt[3]{x^2}dx = 8\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C$$

$$\int 8\sqrt[3]{x^2}dx = 8\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C$$

$$\int 8\sqrt[3]{x^2}dx = \frac{24}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

**6. Hallar la integral de:**

$$\int (5x-3)^2 = \int [(5x)^2 - 2(5x)(3) + 3^2]dx$$

$$\int (5x-3)^2 = \int (25x^2 - 30x + 9)dx$$

$$\int (5x-3)^2 = \int 25x^2dx - \int 30xdx + \int 9dx$$

$$\int (5x-3)^2 = 25\int x^2dx - 30\int xdx + 9\int dx$$

$$\int (5x-3)^2 = 25\frac{x^3}{3} - 30\frac{x^2}{2} + 9x + C$$

$$\int (5x-3)^2 = 25\frac{x^3}{3} - 15x^2 + 9x + C$$

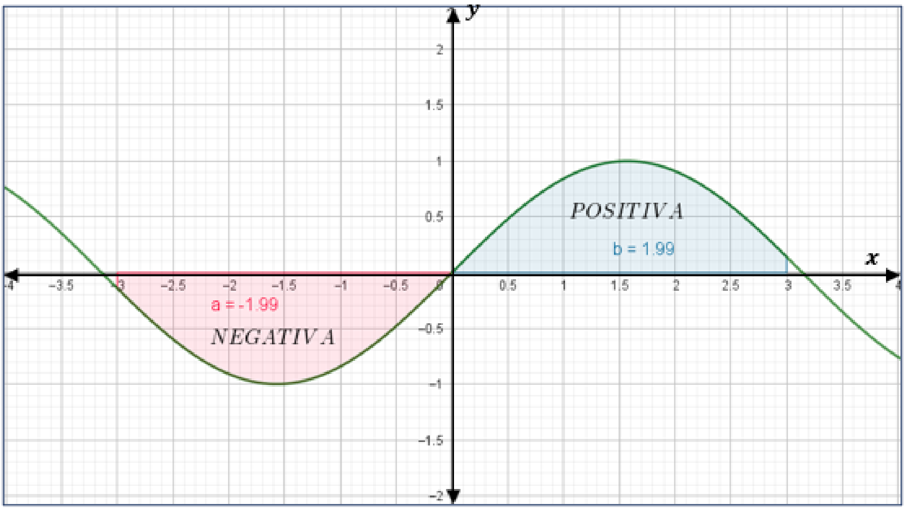
**7. Hallar la integral de:**

$$\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln x + C$$

## Integrales definidas

La ***integral definida*** es una función que representa el área limitada por la gráfica de la función, o el área bajo la curva de la función, dentro de un plano cartesiano las áreas sobre el eje x toma valores positivos y las áreas bajo el eje x toma valores negativos.




**Descripción:** Área positiva y negativa bajo la curva de la función $f(x)$
**Fuente:** Pachacama, M (2023).

La integral definida de la función entre los extremos del intervalo [a, b] se denota como:

$$\int_a^b f(x)dx$$

## Propiedades:

La integral definida cumple las siguientes propiedades:

- Toda integral extendida a un intervalo de un solo punto, [a, a], es igual a cero.
- Cuando la función f (x) es mayor que cero, su integral es positiva; si la función es menor que cero, su integral es negativa.
- Dada la función $f(x)$ se halla una primitiva $F(x)$ *sin constante*.

## Calculo de áreas

Para el cálculo de áreas se aplica uno de los teoremas fundamentales del cálculo también conocida como *Regla de Barrow*:

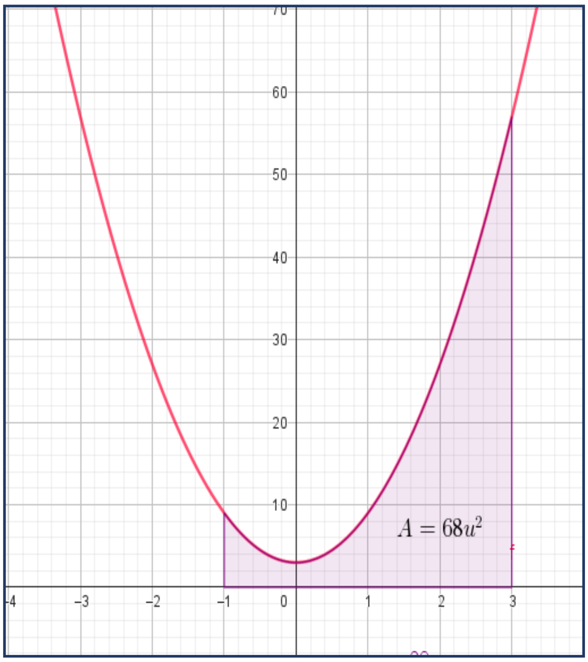
**L**a integral definida de una función continua f(x) en un intervalo cerrado [a, b] es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva F(x) en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Al obtener el valor del área se debe tomar en cuenta que no existen áreas negativas, si el signo es positivo indica que el área se encuentra sobre el eje de las x y si es negativo se encuentra bajo el eje de las x; por lo tanto, se debe aplicar el valor absoluto del valor final obtenido.

## Ejercicios resueltos

1. Encontrar el área de la siguiente función $\boldsymbol{f(x) = 6x^2 + 3}$ en el intervalo $[-1, 3]$

| Solución: | Grafica: $f(x) = 6x^2 + 3$ |
|---|---|
| $\int_{-1}^{3} (6x^2 + 3)\, dx = 6 \int x^2\, dx + 3 \int dx$<br>$\int_{-1}^{3} (6x^2 + 3)\, dx = 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3x$<br>$\int_{-1}^{3} (6x^2 + 3)\, dx = (2x^3 + 3x)\|_{-1}^{3}$<br>$\int_{-1}^{3} (6x^2 + 3)\, dx = \left[2(3)^3 + 3(3)\right] - \left[2(-1)^3 + 3(-1)\right]$<br>$\int_{-1}^{3} (6x^2 + 3)\, dx = [2(27) + 9] - [2(-1) - 3]$<br>$\int_{-1}^{3} (6x^2 + 3)\, dx = (54 + 9) + 5$<br>$\int_{-1}^{3} (6x^2 + 3)\, dx = 68\, u^2$ | <br>**Descripción:** Área de la función<br>**Fuente:** Pachacama, M (2023). |

2. Encontrar el área de la siguiente función $\boldsymbol{g(x) = x^3 + 5x}$**,** en el intervalo $[1, 3]$

<table>
<tr>
<td>

Solución:

$$\int_1^3 (x^3 + 5x)dx = \int_1^3 x^3 dx + 5\int_1^3 x dx$$

$$\int_1^3 (x^3 + 5x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3$$

$$\int_1^3 (x^3 + 5x)dx = \left(\frac{3^4}{4} + 5\frac{(3)^2}{2}\right) - \left(\frac{1^4}{4} + 5\frac{(1)^2}{2}\right)$$

$$\int_1^3 (x^3 + 5x)dx = \left(\frac{81 + 90}{4}\right) - \left(\frac{1 + 10}{4}\right)$$

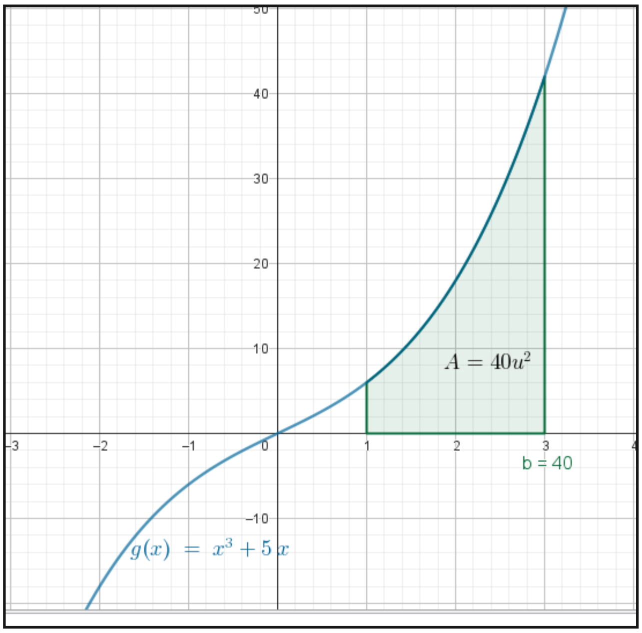
$$\int_1^3 (x^3 + 5x)dx = \frac{171}{4} - \frac{11}{4}$$

$$\int_1^3 (x^3 + 5x)dx = \frac{160}{4}$$

$$\int_1^3 (x^3 + 5x)dx = 40u^2$$

</td>
<td>

Gráfica: $\boldsymbol{g(x) = x^3 + 5x}$




**Descripción:** Área de la función

**Fuente:** Pachacama, M (2023)

</td>
</tr>
</table>

3. Determinar el área de la siguiente función $\boldsymbol{h(x) = sen\ x}$ en el intervalo $[0,\ \pi/2]$

<table>
<tr>
<td>

Solución:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\, dx = -cos\ (x)$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\, dx = -cos\ x|_0^{\pi/2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\, dx = [-cos(\ \pi/2)] - \ [-cos\ (0)]$$

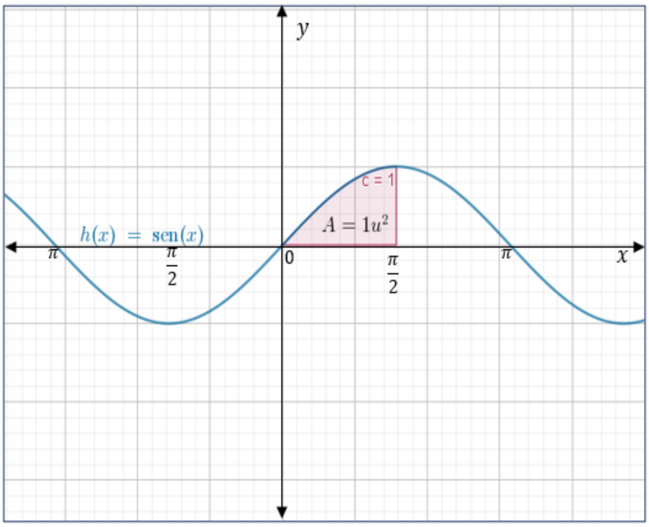
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\, dx = [-cos(\ 90°)] - \ [-cos\ (0°)]$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\, dx = (0) - \ (-1)$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x)\, dx = 1\ u^2$$

</td>
<td>

Gráfica: h$(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen\ x}$




**Descripción:** Área de la función $f(x) = cos\ x$

**Fuente:** Pachacama, M (2023).

</td>
</tr>
</table>

4. Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}x^3$, hallar el área comprendida en el intervalo $[-2, 0]$

Solución:

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}(x^3)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} x^3 dx$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}(x^3)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-2}^{0}$$

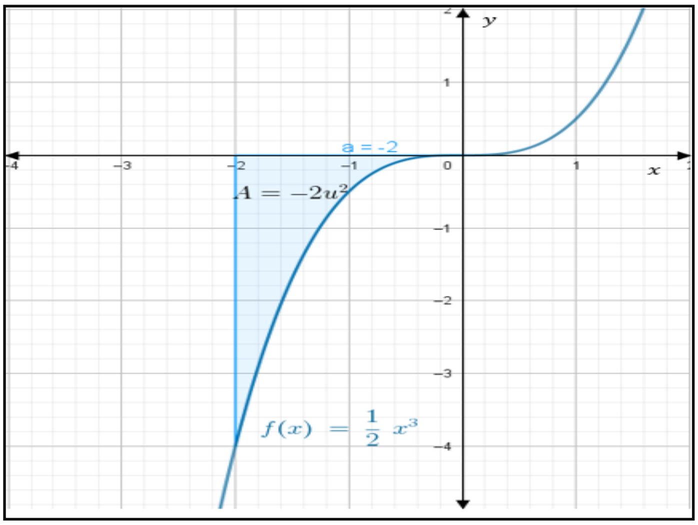
$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}(x^3)dx = \frac{x^4}{8}\Big|_{-2}^{0}$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}(x^3)dx = \frac{0^4}{8} - \frac{(-2)^4}{8}$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}(x^3)dx = 0 - \frac{16}{8}$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{2}(x^3)dx = -2\ u^2$$

Gráfica: $f(x) = \frac{1}{2}x^3$




**Descripción:** Área de la función $h(x) = \frac{1}{2}x^3$

**Fuente:** Pachacama, M (2023).

5. Dada la función $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$, hallar el área comprendida en el intervalo $[1, 1]$

Solución:

$$\int_{1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right) dx = \frac{1}{3}\int_{1}^{1} x^2 dx + 1\int_{1}^{1} dx$$

$$\int_{1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right) dx = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right) + x\right]\Big|_{1}^{1}$$

$$\int_{1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{9} + x\right)\Big|_{1}^{1}$$

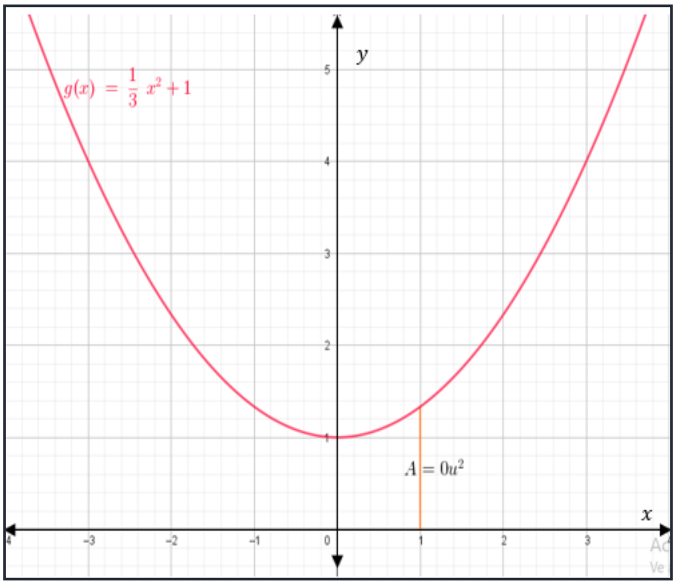
$$\int_{1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right) dx = \left(\frac{1^3}{9} + 1\right) - \left(\frac{1^3}{9} + 1\right)$$

$$\int_{1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right) dx = \left(\frac{1}{9} + 1\right) - \left(\frac{1}{9} + 1\right)$$

$$\int_{1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right) dx = \frac{9}{10} - \frac{9}{10}$$

$$\int_{1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right) dx = 0\ u^2$$

Gráfica: $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1$




**Descripción:** Área de la función

**Fuente:** Pachacama, M (2023).

# Introducción

## La teoría combinatoria

La teoría de combinatoria una técnica de reducción de la dimensionalidad de los datos que intenta resolver problemas donde se debe cuantificar diferentes agrupaciones que se pueden formar a partir de un conjunto de elementos dado. Para ello existen métodos que permiten mecanizar tales cálculos.

Para adentrarnos en el estudio del análisis combinatorio la presente guía pretende estudiar la definición de factorial y la interpretación que tiene en la vida práctica es decir como simplificar información para hacerla más fácil de interpretarla.

# FACTORIAL

**Definición**

El factorial de un número *n*, se define como el producto de todos los números naturales anteriores a él, o al producto de todos los números naturales desde 1 hasta n.

Se representa por n! y se lee n factorial.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \ldots \ldots \ldots \times (n-1) \times n$$

### Se debe considerar que:

Por definición de factorial se establece el valor de 0! Como 1. Será de gran necesidad tenerlo presente a la hora de los cálculos que contemplen factoriales.

$$\boxed{0! = 1}$$

Por otro lado, es importante saber que el desarrollo de factorial puede detenerse en el punto que se desee o convenga.

### Características de factorial, n!:

- Es un número natural, n $\in$ N.
- Resulta del producto de números naturales consecutivos.
- El desarrollo de factorial puede detenerse en el factor que se considere o necesite.
- El factorial de cero es uno, 0!=1

## Ejemplo 1:

- $1! = 1$
- $2! = 1 \times 2 = 2$
- $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$
- $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$
- $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

## Ejemplo 2:

Desarrollar 7! Aplicando la definición de factorial

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

**Importante**: El 7 factorial puede desarrollarse según una de las siguientes opciones

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!$
$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!$
$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4!$
$7! = 7 \times 6 \times 5!$
$7! = 7 \times 6!$

El factorial puede detenerse en cualquiera de los factores del desarrollo, o desarrollarse hasta llegar al factor 1, de acuerdo a la necesidad del cálculo, sin que afecte su valor.

## Ejemplo 3:

Desarrollar 10! Aplicando la definición de factorial

$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

**Importante**: El 10 factorial puede desarrollarse en cualquiera de las siguientes opciones

$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!$
$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!$
$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!$
$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!$
$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!$
$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7!$
$10! = 10 \times 9 \times 8!$
$10! = 10 \times 9!$

## Simplificación de fracciones usando factorial

Este proceso permite simplificar términos cuando los números factoriales aparecen en fracciones.

**Ejemplo:**

Calcular el valor de la siguiente expresión: $\dfrac{8!}{6! \times 3!}$

**Paso 1:** Desarrolle el factorial del numerador considerando los factoriales del denominador, en este caso:

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8 \times 7 \times 6!$$

**Paso 2:** Detener el desarrollo del 8! en 6! Porque en el denominador hay este factorial, para poder simplificar.

De manera que:

$$\frac{8!}{6! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \cancel{\times 6!}}{\cancel{6!} \times 3!} = \frac{8 \times 7}{3!} = \frac{\cancel{56}}{3 \cancel{\times 2} \times 1} = \mathbf{\frac{28}{3}}$$

**Ejemplo 2.**

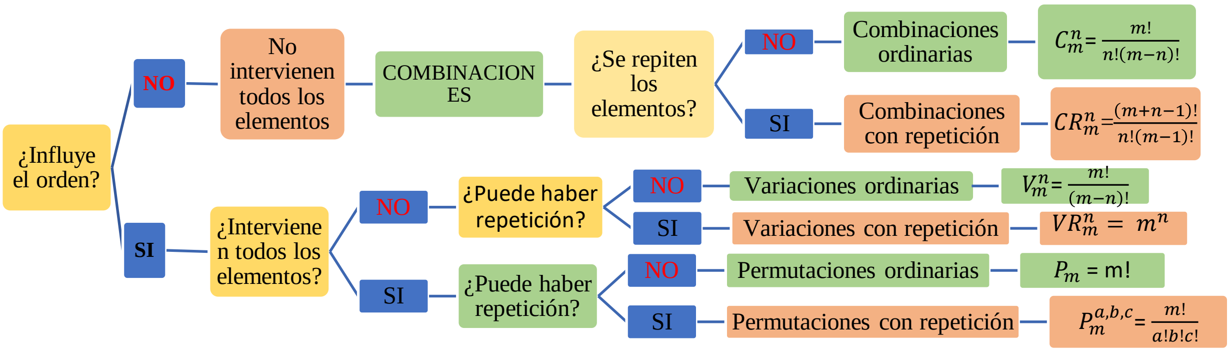
Calcular el valor de: $\dfrac{15! \times 6!}{13! \times 8!}$

Se debe tomar en cuenta el $15!$ y el $8!$

$$\frac{15! \times 6!}{13! \times 8!} = \frac{15 \times 14 \times \cancel{13!} \times \cancel{6!}}{\cancel{13!} \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}} = \frac{15 \times \cancel{14}}{\cancel{8} \times \cancel{7}} = \mathbf{\frac{15}{4}}$$

## Análisis combinatorio

El análisis combinatorio se encarga del estudio de las permutaciones, variaciones y combinaciones, en cada una depende el orden, la repetición de los elementos, la participación de todos los elementos.




**Descripción**: Mapa conceptual de combinaciones, variaciones y permutaciones
**Fuente:** Reinthaller, C. (2022)

## Permutación Lineal sin repetición

**Definición**

Se denomina permutación lineal de n elementos ($P_n$) a cada una de las diferentes ordenaciones que se pueden realizan utilizando todos los elementos.

El número total de permutaciones que se pueden obtener a partir de $n$ elementos, sin repetición corresponde a n!, para permutación lineal sin repetición se emplea la siguiente fórmula:

$$P_n = n!$$

### Donde

$$P_n = \text{permutación de } n$$
$$n = \text{número de elementos}$$

### Cumple las siguientes condiciones:

- ✓ **Si** se considera todos los elementos
- ✓ **Si** importa el orden
- × **No** se repiten los elementos

## Ejemplo 1:

La profesora de artes pide a Juan ordenar 3 frascos en la repisa y regalará 2 puntos a quien responda de manera correcta la siguiente pregunta. ¿De cuántas maneras distintas se puede ordenar los tres frascos en la repisa?

**Solución:**

Asignamos letras a los frascos, A, B y C, respectivamente para mayor facilidad, según el orden de los frascos se obtiene las siguientes posibilidades:

**1ra Posibilidad:** El frasco A en la primera posición. Esto nos da **dos** opciones:


El frasco B de 2do y luego el C


El frasco C de 2do y luego el B

**2da Posibilidad:** El frasco B en la primera posición. Esto nos da **dos** opciones:


El frasco A de 2do y luego el C


El frasco C de 2do y luego el A

**3ra Posibilidad:** El frasco C en la primera posición. Esto nos da **dos** opciones:


El frasco A de 2do y luego el B


El frasco B de 2do y luego el A

**Conclusión:** Como para cada posibilidad hay dos opciones podemos concluir que para 3 elementos tenemos 6 posibilidades de ordenamiento o lo que es lo mismo $3! = 6$

## Ejemplo 2:

**¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5?**

**Paso 1:** Identificar el valor de $n$ "número total de elementos"

Como son 5 números, el valor de n es 5, es decir: $n = 5$

**Paso 2:** Analizar las condiciones:

- ✓ Sí entran todos los elementos
- ✓ Sí importa el orden
- × No se repiten los elementos ya que el enunciado pide cifras diferentes.

**Paso 3:** Se aplica la fórmula de permutación lineal sin repetición
Fórmula: $\boldsymbol{P_n = n!}$

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{120}$$

***Respuesta:*** Se pueden formar **120 números** de 5 cifras diferentes.

## Ejemplo 3:

**¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?**

**Paso 1:** Identificar el valor de $n$ "número total de elementos"

Como son 8 personas, el valor de n es 8, es decir: $n = 8$

**Paso 2:** Analizar las condiciones:

- ✓ Sí entran todos los elementos, porque tienen que sentarse todas las 8 personas
- ✓ Sí importa el orden
- × No se repiten los elementos, porque la misma persona no puede sentarse en dos asientos a la vez.

**Paso 3:** Se aplica la fórmula de permutación lineal sin repetición

Fórmula**:** $\boldsymbol{P_m = m!}$

$$P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \mathbf{40\,320}$$

**Respuesta:** Las 8 personas pueden sentarse de **40 320 formas distintas**.

## Permutación con repetición

Dado un conjunto de n elementos, el número total de permutaciones con repetición (PR) que pueden realizarse con ellos de manera que el primer elemento se repita k1 veces, el segundo k2 veces,… y el enésimo kn veces, está dado por:

$$\boldsymbol{PR_n^{k_1,k_2,k_3} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}}$$

$Donde$

$\boldsymbol{PR_n^{k_1,k_2,k_3}}$ $representa\ permutación\ con\ repetición\ de\ de\ k_n\ elementos$

$\boldsymbol{k_1, k_2, k_3}$ $representas\ las\ veces\ que\ se\ repiten\ cada\ elemento$

**Ejemplo 1:**

| **¿Cuántos números de 7 cifras se pueden formar con los siguientes números?**<br>1; 1; 2; 2; 2; 3; 3 | |
|---|---|
| **Solución:**<br>**Se trata de una permutación con repetición, por lo tanto:**<br><br>Si importa el orden<br>Si entran todos los elementos<br>Si se repiten los elementos | Datos:<br><br>**n** = 7<br>$\boldsymbol{número\ 1\ k_1} = 2;$<br>$\boldsymbol{número\ 2\ k_2} = 3$<br>$\boldsymbol{número\ \ 3\ k_3} = 2$ |

| | |
|---|---|
| Se aplica la ecuación de permutación con repeticiones | $PR_n^{a,b,c} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$ |
| Se reemplazan los datos | $\boldsymbol{PR_7^{2,3,2}} = \frac{7!}{2! \times 3! \times 2!}$ |
| Descomponer 7! Hasta 3! Para simplificar valores. | $\boldsymbol{PR_7^{2,3,2}} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3! \times 2!}$ |
| Si no es posible simplificar factoriales se debe desarrollarlos, en este caso 2! Del denominador. | $\boldsymbol{PR_7^{2,3,2}} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{(1 \times 2)(2 \times 1)}$ |
| Se realizan las multiplicaciones y simplificaciones de valores si es posible. | $\boldsymbol{PR_7^{2,3,2}} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{(2)(2)}$ |
| Se realizan las operaciones: | $\boldsymbol{PR_7^{2,3,2}} = \frac{7 \times 5}{1}$ <br> $\boldsymbol{PR_7^{23,2} = 35}$ |
| **Se pueden formar 35 números.** | |

## Ejemplo 2:

| | |
|---|---|
| En el palo de señales de un barco se pueden izar 4 banderas rojas, 2 azules y 4 verdes ¿Cuántas señales distintas se pueden realizar con las 10 banderas?<br><br>Si importa el orden<br>Si entran todos los elementos<br>Si se repiten los elementos | |
| **Solución:**<br>**Se trata de una permutación con repetición, por lo tanto:**<br><br>Si importa el orden<br>Si entran todos los elementos<br>Si se repiten los elementos | **Datos:**<br>n = 4<br>$\boldsymbol{Banderas\ rojas\ k_1 = 4;}$<br>$\boldsymbol{Banderas\ azules\ k_2 = 2;}$<br>$\boldsymbol{Banderas\ verdes\ k_3 = 4}$ |
| Se aplica la ecuación de permutación con repeticiones | $pr_m^{r,a,v} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}$ |

| | |
|---|---|
| Se reemplazan los datos | $pr_{10}^{4,2,4} = \frac{10!}{4!\,2!\,4!}$ |
| Descomponer 10! Hasta 4! Para simplificar valores. | $pr_{10}^{a,b,c} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4! \times 2!}$ |
| Si no es posible simplificar factoriales se debe desarrollarlos, en este caso 2! y 4! Del denominador. | $pr_{10}^{a,b,c} = \frac{10\,x\,9\,x\,8\,x\,7\,x\,6\,x\,5}{4!\,2!}$ |
| Se realizan las multiplicaciones y simplificaciones de valores si es posible. | $pr_{10}^{a,b,c} = \frac{10\,x\,9\,x\,8\,x\,7\,x\,6\,x\,5}{(1x\,2\,x\,3\,x4)(1\,x2)}$ |
| Realizar las multiplicaciones: | $pr_{10}^{a,b,c} = \frac{151200}{(24)(2)}$ |
| Realizar la división: | $pr_{10}^{a,b,c} = \frac{151200}{48}$ |
| $Se\ pueden\ realizar\ 3150\ señales\ distinta$ | |

# Variaciones:

Se denomina variaciones a las posibles maneras de ordenar $\mathbf{r}$ ***elementos*** de un total de $\boldsymbol{n}$ ***elementos*** que se pueden obtener, pueden ser con repeticiones o sin repeticiones.

Una variación cumple con las siguientes condiciones:

- $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{n}$
- $\boldsymbol{Sí}\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}$ $se\ comvierte\ en\ una\ permutación\ \boldsymbol{P}$

## Variaciones sin repetición.

Se denomina variaciones sin repeticiones a las posibles maneras de ordenar $\mathbf{r}$ ***elementos*** de un total de $\boldsymbol{n}$ ***elementos*** que se pueden obtener sin repetir ninguno de los mismos.

Se aplica la ecuación:

$$\boxed{V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Siendo:

$\boldsymbol{n}$ $el\ número\ de\ elementos\ totales$

$\boldsymbol{r}$ $el\ número\ de\ elementos\ tomados$

- **No** entran todos los elementos.
- **Sí** importa el orden.
- **No** se repiten los elementos.

### Problemas resueltos.

**Ejemplo 1:** Calcular las variaciones de 5 elementos tomados de tres en tres.

- **No** entran todos los elementos
- **Sí** importa el orden
- **No** se repiten los elementos Se toman únicamente 3 de los 5. De acuerdo a las condiciones dadas se trata de una variación sin repetición.

Por lo tanto:

| Datos: | Proceso: |
|---|---|
| $n = 5$<br>$r = 3$<br><br>**Ecuación:**<br><br>$\boldsymbol{V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$ | $V_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!}$<br>**Desarrollar los factoriales:**<br>$V_6^3 = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!}$<br>**Simplificar los factoriales:**<br>$V_5^3 = 5 \times 4$<br>**Realizar las operaciones:**<br>$V_5^3 = 20$ |
| Respuesta: Se pueden obtener 20 variaciones | |

**Ejemplo 2:** Hallar el número de palabras diferentes de 6 letras que se puede formar con las letras del nombre ***Santiago***, si cada letra no se emplea más de una vez.

Datos

- **No** entran todos los elementos se debe seleccionar 6 letras
- **Sí** importa el orden
- **No** se repiten los elementos solo se utiliza 1 letra en cada ocasión

De acuerdo a las condiciones dadas se trata de una variación sin repetición

| Datos: | Proceso: |
|---|---|
| El nombre Santiago tiene 8 letras.<br><br>**n**= 8<br>$r = 6$<br>**Ecuación:**<br>$\boldsymbol{V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$ | $V_8^6 = \frac{8!}{(8-6)!}$<br>**Desarrollar los factoriales:**<br>$V_8^6 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$<br>**Simplificar los factoriales:**<br>$V_8^6 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$<br>**Realizar las operaciones:**<br>$V_8^6 = 20\,160$ |
| Respuesta: Se puede formar 20 160 palabras con 8 letras tomadas de 6 en 6. | |

**Ejemplo 3:** En una competencia atlética participaron 40 corredores ¿De cúantas maneras se puede formar el podio de los 3 primeros lugares?

- **No** entran todos los participantes solo se puede seleccionar 3
- **Sí** importa el orden de llegada de los participantes
- **No** se repiten los participantes.

| **Datos:** | **Proceso:** |
|---|---|
| **Ecuación:**<br>**Datos:**<br>**n**$= 40$<br>$r = 3$<br>**Ecuación:**<br>$\boldsymbol{V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$ | $V_{40}^{3} = \frac{\mathbf{40!}}{\mathbf{(40-3)!}}$<br>**Desarrollar los factoriales:**<br>$V_{40}^{3} = \frac{\mathbf{40\ x\ 39\ x\ 38\ x\ 37!}}{\mathbf{37!}}$<br>**Simplificar los factoriales:**<br>$V_{40}^{3} = 40\ x39\ x38$<br>**Realizar las operaciones:**<br>$V_{40}^{3} = 59\,280$ |
| Respuesta: Se puede formar el podio de 59 280 maneras | |

## Variaciones con repeticiones

Se denomina variaciones con repeticiones a las posibles maneras de ordenar $\mathrm{r}$ $\boldsymbol{elementos}$ de un total de $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{elementos}$ que se pueden obtener repitiendo los elementos:

Se aplica la ecuación:

$$\boxed{\boldsymbol{VR_r^n = n^r}}$$

Siendo:

$n$ *el número de elementos totales*

$r$ *el número de elementos tomados*

- **No** entran todos los elementos.
- **Sí** importa el orden.
- **Sí** se repiten los elementos.

## Problemas resueltos.

**Ejemplo 1:** ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5?

- **No** entran todos los elementos solo se toman 3
- **Sí** importa el orden
- **Sí** repiten los elementos

De acuerdo a las condiciones dadas se trata de una variación sin repetición

| **Datos:** | **Proceso:** |
|---|---|
| $n = 5$<br>$r = 3$<br>**Ecuación:**<br>$VR_r^n = n^r$ | $$\boldsymbol{VR_r^n = n^r}$$ **Reemplazar datos:**<br>$VR_3^5 = \mathbf{5^3}$<br>**Realizar la operación de potencia.**<br>$VR_3^5 = \mathbf{125}$ |
| Respuesta: Se puede formar 125 números de 3 cifras. | |

**Ejemplo 2:** Sean las letras A, B, C ¿Cuántos grupos de dos letras se pueden formar?

- **No** entran todos los elementos solo se toman 2
- **Sí** importa el orden
- **Sí** repiten los elementos

De acuerdo a las condiciones dadas se trata de una variación sin repetición

| **Datos:** | |
|---|---|
| $n = 3$<br>$r = 2$<br>**Ecuación:**<br>$VR_r^n = n^r$ | $$\boldsymbol{VR_r^n = n^r}$$ **Reemplazar datos:**<br>$VR_2^3 = \mathbf{3^2}$<br>**Realizar la operación de potencia.**<br>$VR_2^3 = \mathbf{9}$ |
| Respuesta: Se puede formar 9 grupos de 2 letras | |

## Combinaciones

Las combinaciones se obtienen al seleccionar de un conjunto de $\boldsymbol{n}$ elementos grupos de $\boldsymbol{r}$**elementos**, de manera que cada grupo sea diferente a los demás, solo si contiene al menos un elemento distinto, sea cual sea su orden de colocación en el grupo. Una combinación puede ser sin o con repetición.

### Combinaciones sin repetición

Dado un conjunto de $\boldsymbol{n}$ elementos, se denominan combinaciones sin repetición a cada una de las posibles combinaciones de $\boldsymbol{r}$ elementos que se pueden obtener sin repetir ningún elemento.

Las combinaciones sin repetición de **n** elementos cumplen las siguientes condiciones:

- **No** entran todos los elementos
- **No** importa el orden
- **No** se repiten los elementos

El total de combinaciones que se pueden formar con $\boldsymbol{r}$ elementos de un total de $\boldsymbol{n}$ elementos esta dado por:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}; con\ \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\ y\ \boldsymbol{r} \in \mathbb{N}$$

Donde:

$\boldsymbol{n} =$ número de elementos totales

$\boldsymbol{r} =$ número de elementos tomados

**Ejemplos:**

1. Si de un grupo de 6 personas se quieren seleccionar 2. ¿De cuántas maneras distintas pueden ser seleccionadas?

**Descripción:** Grupo de 6 personas.
**Fuente:** Página Web (2023)

Datos:

$n = 6$

$r = 2$

Análisis:

- No entran todos los elementos
- No importa el orden
- No se repiten los elementos

Fórmula:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Solución:

$$C_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!\,2!}$$

$$C_2^6 = \frac{6!}{4!\,2!}$$

$$C_2^6 = \frac{\cancel{4!} \times 5 \times 6}{\cancel{4!}.1 \times 2}$$

$$C_2^6 = \frac{30}{2}$$

$$C_2^6 = 15$$

Conclusión: Se pueden seleccionar 2 personas de 15 maneras diferentes.

2. De 18 vestidos que hay en una tienda, se eligen 6. ¿De cuántas maneras distintas pueden ser elegidos?

Datos:

$n = 18$

$r = 6$

Análisis:

- No entran todos los elementos
- No importa el orden
- No se repiten los elementos

Fórmula:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Solución:

$$C_6^{18} = \frac{18!}{(18-6)!\,6!}$$

$$C_6^{18} = \frac{18!}{12!\,6!}$$

$$C_6^{18} = \frac{12!\,13 \times 14 \times 15 \times 16 \times 17 \times 18}{12!\,.1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$$

$$C_6^{18} = \frac{13\ 366\ 080}{720}$$

$$C_6^{18} = 18\ 564$$

**Conclusión:** Se puede elegir de18 564 formas diferentes los 6 vestidos.

**Combinaciones con repetición.**

Dado un conjunto de $\boldsymbol{n}$ elementos, se denominan combinaciones con repetición a cada una de las posibles combinaciones de $\boldsymbol{r}$ elementos que se pueden obtener cuando se admiten repeticiones de ellos.

Las combinaciones con repetición de $\boldsymbol{n}$ elementos cumplen las siguientes condiciones:

- **No** entran todos los elementos
- **No** importa el orden
- **Sí** se repiten los elementos

El total de combinaciones con repetición que se pueden formar con $\boldsymbol{r}$ elementos de un total de $\boldsymbol{n}$ elementos está dado por:

$$CR_r^n = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!}, con\ \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\ y\ \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$$

Donde:

$\boldsymbol{n}$ = número de elementos totales.

$\boldsymbol{r}$ = número de elementos tomados.

**Ejemplos:**

1. En una pastelería hay 5 tipos de pasteles diferentes, si se desea eligen 3 de estos. **¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 de los pasteles?**

**Descripción:** Diferentes tipos de pasteles7.
**Fuente:** Página Web (2023)

Datos:

$n = 5$

$r = 3$

Análisis:

- **No** entran todos los elementos
- **No** importa el orden
- **Sí** se repiten los elementos

Fórmulas:

$$CR_r^n = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$$

Solución:

$$CR_3^5 = \frac{(5+3-1)!}{(5-1)!\,3!}$$

$$CR_3^5 = \frac{7!}{4!\,3!}$$

$$CR_3^5 = \frac{\cancel{4!} \times 5 \times 6 \times 7}{\cancel{4!}.1 \times 2 \times 3}$$

$$CR_3^5 = \frac{210}{6}$$

$$CR_3^5 = 35$$

**Conclusión:** Se puede elegir de 35 maneras los 3 pasteles

2. En el supermercado venden refresco de diferentes sabores: manzana, fresa, limón, mora, mango y durazno. Se desea comprar 3 de estos, sin importar que se escojan varios del mismo sabor.

**¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 sabores de refresco?**


**Descripción:** Refrescos.
**Fuente:** Página Web (2023)

Datos:
$n = 6$
$r = 3$

Análisis:

- **No** entran todos los elementos
- **No** importa el orden
- **Sí** se repiten los elementos

Fórmulas:

$$CR_r^n = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$$

Solución:

$$CR_r^n = \frac{(6+3-1)!}{(6-1)!\,3!}$$

$$CR_r^n = \frac{8!}{5!\,3!}$$

$$CR_r^n = \frac{\cancel{5!} \times 6 \times 7 \times 8}{\cancel{5!}\,.1 \times 2 \times 3}$$

$$CR_r^n = \frac{336}{6}$$

$$CR_r^n = 56$$

**Conclusión:** Se pueden elegir de 56 maneras los 6 sabores de refrescos.

## Referencias Bibliográficas/Autores


Ministerio de Educación del Ecuador (2017). Adaptaciones curriculares para la educación con personas jóvenes y adultas. Subnivel superior de educación general básica y nivel de bachillerato.

Ministerio de Educación del Ecuador (2014). *Matemática* Primero Bachillerato General Unificado.