C12 Modalidad a Distancia - Virtual

Matemática

Guía de Estudio para Examen de Ubicación

9no EGB

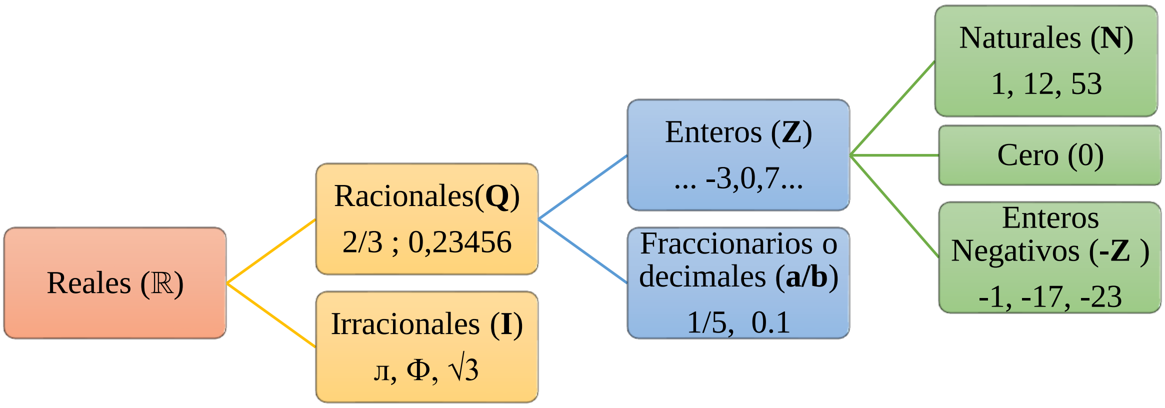
Índice

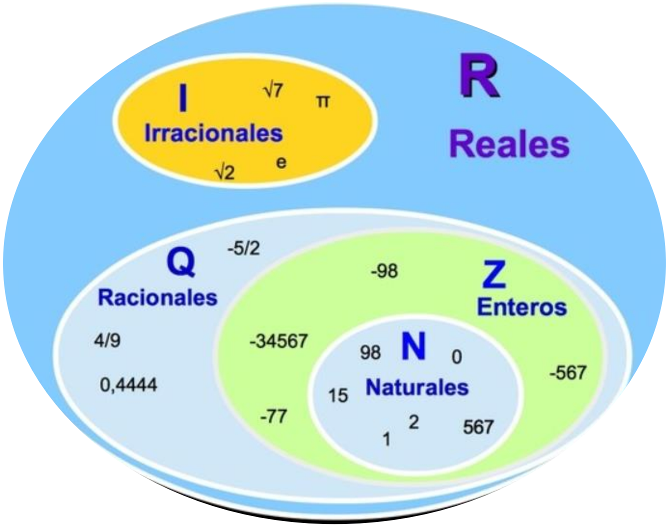
Números reales 2
Conjunto de números reales 2
Relación de orden 2
Propiedades de los números reales 5
Valor absoluto 5
Potenciación 7
Propiedades de la potenciación 7
Partes de la notación científica: 10
Elementos de un monomio 12
Suma o resta de monomios. 12
Polinomio 12
Operaciones con Polinomios 13
PRODUCTOS NOTABLES 16
Binomio al cuadrado 17
Cuadrado de la diferencia de un binomio 17
Suma por la diferencia de dos términos 18
Producto de la forma $(x \pm a)$ $(x \pm b$ 18
Cubo de un binomio 19
Trinomio de la forma $\mathbf{x2 \pm bx \pm c}$ 20
Ecuaciones de primer grado 24
Intervalos de números reales 29
Inecuaciones de primer grado 31
Variables estadísticas 35
Población 36
Muestras 36
Obtención de muestras 37
Espacio muestral 37
Medidas de tendencia Central 38
Media 39
Mediana 39
Moda 40
Medidas de dispersión 41
Rango 43
Desviación Media 44
Varianza 44
Desviación típica 44
Triángulos y su clasificación 44
Líneas y puntos notables del triángulo. 46
Altura 46
Teorema de Tales 50
Teorema de Tales 51
Referencias 63

Números reales

Los números reales son todos números que están representados como puntos en la recta real. Este conjunto está formado por la unión de los números naturales, enteros, racionales e irracionales. Se representa con la letra **ℝ.**

Conjunto de números reales





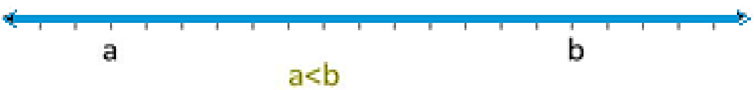
Relación de orden

Los números reales se pueden representar en una recta numérica, lo que permite establecer un orden dentro del conjunto de números reales al observar su representación decimal.

La relación de orden se establece mediante los símbolos: < (menor que), > (mayor que), ≤ (menor o igual que), ≥ (mayor o igual que).

Se establece que dado un par de números reales **a** y **b**, se considera que **b** es **mayor** que **a** si, al ser representados gráficamente en la **recta numérica**, **b** se ubica a la **derecha** de **a**

Recta real o numérica



Los números reales guardan una relación de orden en la que, para dos números reales a y b, se cumple una y sola una de las siguientes condiciones:

a < b | **a > b** | **a = b**

El signo de igual es ya conocido, mientras que los demás signos usados se denominan signos de desigualdad, estos son:

Signo	Significado	Ejemplo
<	Menor que	**x < 5 se lee x es menor que 5**
≤	Menor o igual que	**x ≤ 5 se lee x menor o igual que 5**
>	Mayor que	**x > 5 se lee x mayor que 5**
≥	**Mayor o igual que**	**x ≥ 5 se lee x mayor o igual que 5**

Ejemplo:

Ubicar en la recta real y determinar la relación de orden entre los números: $\frac{5}{2}$ **y** $\frac{22}{8}$

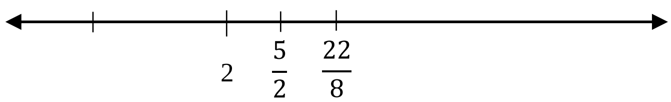
Solución:

Es necesario calcular estos valores numéricos con el fin de establecer su expresión decimal y determinar cuál es el mayor y cuál el menor entre ellos.

La expresión decimal de esos números es:

Número Real	Expresión decimal
$\frac{5}{2}$	2.5
$\frac{22}{8}$	2.75

Representación sobre una recta de los números reales



Relación de orden:

$\frac{5}{2} < \frac{22}{8}$

Ejercicios Resueltos

2. Dados los siguientes números, determinar su orden de menor a mayor.

$$\sqrt{5}, \qquad 2, \qquad \frac{29}{11}$$

Solución

Primero se determina su expresión decimal

Número Real	Expresión decimal

2	2.00
$\sqrt{5}$	2.24
$\frac{29}{11}$	2.63

Relación de orden:

$$2 < \sqrt{5} < \frac{29}{11}$$

3. Dados los siguientes números, determinar su orden de menor a mayor.

$$\sqrt{7}, \quad 3, \quad \frac{42}{13}$$

Solución

Primero se determina su expresión decimal

Número Real	Expresión decimal
$\sqrt{7}$	2.64
3	3
$\frac{42}{13}$	3,23

Relación de orden: $\sqrt{7} < 3 < \frac{42}{13}$

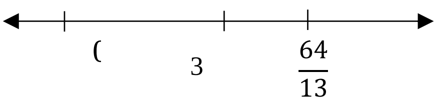
4.- Colocar los signos >, < o =, según corresponda.

3 $\boxed{}$ 64/13

$\sqrt{12}$ $\boxed{}$ 16

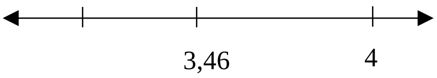
Solución

Número Real	Expresión decimal
3	3.00
$\frac{64}{13}$	4,92



$3 \boxed{<} \frac{64}{13}$

Número Real	Expresión decimal
$\sqrt{12}$	3,46
$\sqrt{16}$	4,00



3,46 $\boxed{<}$ 4

Propiedades de los números reales

Cuando sumas o multiplicas dos números reales, el resultado también es un número real. Además, el orden en el que realizas las sumas o multiplicaciones no cambia el resultado. Incluso cuando sumas o multiplicas tres o más números reales, el resultado siempre será el mismo sin importar cómo los agrupes.

Valor absoluto

El valor absoluto de un número, ya sea positivo o negativo, es el número que obtenemos al eliminar su signo. Para representarlo, escribimos el número entre dos barras verticales.

$|\mathbf{8,432}|$ = 8,432 $|\mathbf{-14}|$ = 14

Representaciones decimales y aproximaciones en números infinitos

En los números reales, hay números especiales llamados periódicos e irracionales que tienen representaciones decimales infinitas. Para trabajar con ellos en operaciones matemáticas, utilizamos aproximaciones con un número limitado de dígitos (comúnmente 2 decimales).

Ejemplo:

(π) = 3.141592653589...

Lo simplificamos a 2 decimales

(π) = 3.14

Resumen de propiedades de números reales

Propiedad	**Operación**	
	Adición	**Multiplicación**
Conmutativa	**a + b = b + a**	**a · b = b · a**
El orden al sumar o multiplicar no afecta el resultado.	**Ejemplos:** 13 + 18 = 18 + 13 40 + 14 = 14 + 40	**Ejemplos:** **(-5)4 = 4(-5)** **8·12 = 12·8**
Asociativa	**a + (b + c) = (a + b) + c**	**a (bc) = c(ab)**
Se puede hacer diferentes asociaciones al sumar o multiplicar y no se afecta el resultado.	**Ejemplo:** 8 + (4 + 7) = (8 + 4) + 7	**Ejemplo:** **7(4·8) = 8(7·4)**
Identidad	**a + 0 = a**	**a · 1 = a**

Todo real sumado a 0 se queda igual; el 0 es la identidad aditiva. **Todo real multiplicado por 1 se queda igual; el 1 es la identidad multiplicativa.**	**Ejemplo:** -11 + 0 = -11	**Ejemplo:** **17 · 1 = 17**
Inversos	**a + (-a) = 0**	**a · 1/a = 1**
La suma de opuestos es cero. **El producto de recíprocos es 1.**	**Ejemplo:** 15 + (-15) = 0	**Ejemplo:** **7 · 1/7 = 1**
Distributiva	**a (b + c) = ab + ac**	
El factor se distribuye a cada sumando.	**Ejemplo:** **5(8 + 3) = 5·8 + 5·3**	

Ejercicios Resueltos

1. Resolver la siguiente operación de números reales

$2 - (7 - 5 * 3) =$

Solución

$2 - (7 - 5 * 3)$

$2 - (7 - 15)$

$2 - (-8)$

$2 + 8$

10

2.- Clasifica los siguientes números como naturales, enteros, racionales o reales

-3	**2,7**	**3/7**	**√ 4**	**1**	**0200200002**

Recuerda que siempre es importante prestar atención a los decimales y realizar las operaciones en el orden correcto para obtener resultados precisos.

Solución:
*** NATURALES: √ 4,**
*** ENTEROS: -3, √ 4,**
*** RACIONALES: -3, 2, 7, 3/7, √ 4,**
*** REALES: TODOS**

3.- Clasifica los siguientes números como naturales, enteros, racionales o reales

-3/2	**2/3**	**1,5**	**√ 2**	**2,3343434342**	**√ 16,**

Solución:
NATURALES: 4
-ENTEROS: 4
-RACIONALES: -3 /2, 2/ 3, 1,5
-REALES: TODOS
NATURALES: 4

Potenciación

La potenciación se puede considerar como una operación abreviada de una multiplicación reiterada con el mismo factor

Los términos que intervienen en la potenciación son:

$$a^n$$

Exponente: indica las veces que vamos a multiplicar la base.

Base: indica la cantidad que se va a multiplicar.

Cuando el exponente es un número natural "n", este indica las veces que aparece "a" multiplicado por sí mismo, siendo "a" un número cualquiera:

$$a^n = \underbrace{a * a * a * \dots .* a * a * a}_{\text{n veces}}$$

Resumen

BASE	EXPONENTE	RESULTADO	EJEMPLOS
Positiva	Positivo	Positivo	$5^2 = 5 * 5 = 25$ $3^3 = 3 * 3 * 3 = 27$
Negativa	Par	Positivo	$(-2)^2 = (-2)(-2) = +4$ $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = +81$
	Impar	Negativo	$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$ $(-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243$

Propiedades de la potenciación

PROPIEDAD	¿Qué se realiza?	Expresión	Ejemplos
Exponente negativo	Se invierte la potencia con la misma base, pero con el exponente positivo	$(a)^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(4)^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

			$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = \left(-\frac{2^5}{1^5}\right) = -32$
Exponente "0"	El resultado siempre será 1	$a^0 = 1$	$25^0 = 1$ $(-100)^0 = 1$
Exponente "1"	El resultado siempre será el mismo número	$a^1 = a$	$1^1 = 1$ $(-45)^1 = -45$
Exponente racional	Se transforma en una raíz, el denominador será el índice de la raíz y el numerador será el exponente de la base	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$(124)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{124}$ $(12)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{12^5}$
Potencia de una potencia	Se multiplican los exponentes	$(a^m)^n = a^{m*n}$	$(3^2)^5 = 3^{2*5} = 3^{10}$ $(7^3)^2 = 7^{3*2} = 7^6$
Multiplicación de potencias con la misma base	Se conserva la base y se suman los exponentes	$a^m * a^n = a^{m+n}$	$17^4 * 17^5 = 17^{4+5} = 17^9$ $(-5)^2 * (-5)^3 = (-5)^{2+3} = (-5)^5$
Multiplicación de potencias con el mismo exponente	Se conserva el exponente y se multiplican las bases	$a^m * b^m = (a * b)^m$	$7^2 * 3^2 = (7 * 3)^2 = 21^2$ $(-2)^5 * 4^5 = (-2 * 4)^5 = -8^5$
División de potencias con la misma base	Se conserva la base y se restan los exponentes	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{13^7}{13^2} = 13^{7-2} = 13^5$ $\frac{(-3)^{11}}{(-3)^9} = (-3)^{11-9} = (-3)^2$
División de potencias con el mismo exponente	Se conserva el exponente y se dividen las bases	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$\frac{8^7}{4^7} = \left(\frac{8}{4}\right)^7 = 2^7$ $\frac{(-21)^4}{7^4} = \left(\frac{-21}{7}\right)^4 = (-3)^4$

Ejercicios resueltos

Resolver la siguiente operación de potencias y expresar la respuesta como una potencia.

$$2^3 * 2^{-8} * 2$$

Solución

$2^3 * 2^{-8} * 2^1$	El tercer número tiene exponente 1.
2^{3-8+1}	Se conserva la base y los exponentes se suman
2^{-4}	Respuesta

2. Resolver la siguiente operación de potencias y expresar la respuesta como una potencia.

$$3^4 * \frac{21^5}{7^5} * (3^{-2})^4$$

Solución

$3^4 * \frac{21^5}{7^5} * (3^{-2})^4$ División/ Se conserva el exponente y se dividen las bases

$$3^4 * \left(\frac{21}{7}\right)^5 * (3^{-2})^4$$

$3^4 * 3^5 * (3^{-2})^4$ Potencia de una potencia/ Se multiplican los exponentes

$$3^4 * 3^5 * 3^{-2*4}$$

$3^4 * 3^5 * 3^{-8}$

3^{4+5-8} Se conserva la base y los exponentes se suman

$3^1 = 3$ Respuesta

3. En un parque hay cinco lagos con cinco patos en cada lago. ¿Cuántos patos habrá en total?

Solución

Lagos: 5

Patos: 5

$5^2 = 5*5 = 25$

Respuesta: En total hay 25 patos

4. Un granjero tiene 12 cajas de huevos. Cada caja contiene 12 docenas de huevos. ¿Cuántos huevos tiene en total el granjero?

Datos:

Cada caja contiene Huevos: 12 docenas

Cada docena: 12 huevos

Cajas: 12

Resolución:

12 cajas x 12 docenas = 144 docenas en total.

144 docenas x 12 huevos cada una = 1728 huevos en total.

Representándolo en potencia:

12^3 que equivale a 12 * 12 * 12 = 1728

Solución

El granjero tiene un total de **1728** huevos.

Notación científica

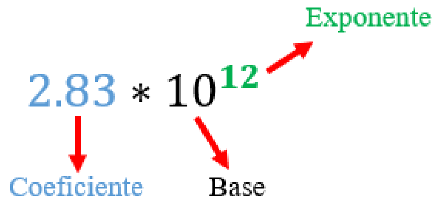
La notación científica, también denominada notación exponencial, es una forma de escribir números muy grandes o muy pequeños, basados en potencias de 10

Partes de la notación científica:

Coeficiente: un número real entre 1 y 10, pero sin incluir el 10

Base: es la base 10

Exponente: es la potencia a la que está elevada la base.



Para transformar un número, tanto muy grande como muy pequeño, se debe mover el punto decimal para un lado u otro y se cuentan los espacios desplazados.

0, 0 0 0 0 0 7 8

6 espacios

$7.8 * 10^{-6}$

Notación científica de números grandes

El exponente es **positivo** (+) porque el punto decimal recorre hacia la **izquierda**.

Ejemplos:

La capital de un país tiene cierta cantidad de habitantes: 95000000

Se expresamos el número entre 1 y 10: **9.5**

Se multiplica por una potencia de base 10: $\mathbf{9.5x10}^{?}$

Espacios que recorrió el punto para expresar el número entre 1 y 10: **7**

Respuesta: $\mathbf{9.5x10^{7}}$

Si queremos ir en sentido contrario $\mathbf{9.5x10^{7}}$**,** quiere decir que hay que correr el punto decimal 7 veceshacia la derecha **95000000**

Ejemplos:

$6700000000 = 6.7x10^{9}$

$500 = 5x10^{2}$

$62500000000 = 6.25x10^{10}$

Notación científica de números pequeños

El exponente es **negativo** (–) porque el punto decimal recorre hacia la **derecha**.

Ejemplos:

La probabilidad de que usted gane la lotería es: 0.00000234

Se expresa el número entre 1 y 10: **2.34**

Se multiplica por una potencia de 10: $\mathbf{2.34x10}^{?}$

Espacios que recorrió el punto para expresar el número entre 1 y 10: **6**

Respuesta: $\mathbf{2.34x10^{-6}}$

Si queremos ir en sentido contrario $\mathbf{2.34x10^{-6}}$**,** quiere decir que hay que correr el punto decimal 6veces hacia la izquierda 0.00000234

Ejemplos:

0,0000000000767 = $7.67x10^{-11}$

0,00000234 = $2.34x10^{-6}$

Ejercicios:

El diámetro de la Tierra es de aproximadamente 12,742 kilómetros. Escribe este diámetro en notación científica.

Solución:

12,742 km = 1.2742 x 10^4 km

Errores en notación científica

Debemos poner mucha atención a esas convenciones para escribir correctamente en notación científica.Veamos algunos ejemplos:

Número	¿Notación Científica?	Explicación
$\mathbf{1.85 * 10^{-2}}$	Si	1.85 esta entre 1 y 10 -2 es un número entero
$\mathbf{1.083 * 10^{\frac{1}{2}}}$	No	1/2 NO es un número entero
$\mathbf{0.82 * 10^{14}}$	No	0.82 NO esta entre 1 y 10
$\mathbf{10 * 10^{3}}$	No	10 NO esta entre 1 y 10

Descripción por: errores en notación científica

Elaborado por: Área de Matemática EGBS

Uso de la calculadora

El siguiente video muestra como expresar números en notación científica con ayuda de la calculadora:

https://www.youtube.com/watch?v=c6iauy_4OZw&feature=youtu.be

NOTA: No es necesario adquirir la calculadora que se muestra en el video, usted puede descargar en su celular una aplicación de "**calculadora científica**"

Monomio

Es una expresión algebraica que consta de un solo término, formado por el producto de números reales y las potencias de exponente natural de una o más variables.

Elementos de un monomio

Coeficiente. Es el número que acompaña a una letra en una expresión algebraica (la parte numérica).

$4\,x^{2}$

Exponente. Es el número pequeño que se coloca arriba y a la derecha de la variable para indicar cuántas veces se multiplica por sí misma.

Variable. Es la letra que representa un número desconocido.

Suma o resta de monomios.

Para sumar o restar monomios, se deben combinar aquellos que tengan las mismas variables y exponentes.

El coeficiente se suma o resta conservando la variable y el exponente.

Ejemplo:

$4x^2 + 2x^2 - 5x^2$

Sumamos los coeficientes: $4 + 2 - 5 = 1$

Variable y exponente: x^2

Solución:

$\mathbf{1}x^2$ En monomios y polinomios, se omite el coeficiente igual a **1** y solo se muestra la variable con su exponente. En este caso $\mathbf{x^2}$

La solución es: $\mathbf{x^2}$

Multiplicación de monomios

Para multiplicar monomios, se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de las variables.

Ejemplo:

$3x^2 * 2x^3 =$

Multiplicamos los coeficientes: $3 * 2 = 6$

Sumamos los exponentes: $2 + 3 = 5$

Y conservamos la variable: **x**

Solución

La solución es: $\mathbf{6x^5}$

Polinomio

Es una expresión algebraica formada por la suma o resta de varios monomios.

Los **monomios** que conforman un polinomio se denominan **términos** del polinomio.

Términos

$$4x^2y + 3x - 5$$

Monomios

Grado relativo de un polinomio

Es el mayor exponente de una determinada variable.

Ejemplo:

Determinar el grado relativo del siguiente polinomio con respecto a “x”

$\mathbf{4x^2y + 3x - 5}$

El grado relativo es 2 (entre los términos, es el mayor exponente de “x”)

Grado absoluto de un polinomio

Es el mayor de los grados de los términos que contiene el polinomio.

EJEMPLO

$4x^2y \; + 3x \; - \; 5$ Primero se calculan los grados de cada monomio

2+1=3 1 0

El grado absoluto es 3

Polinomio completo

Es aquel que tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

EJEMPLO

$1 + 5x - 2x^2 - x^3 + 7x^4$ (Los exponentes de “x” van desde el 1 hasta el 4 sin faltar ninguno)

Polinomio ordenado

Un polinomio está ordenado si los monomios que lo forman están escritos de mayor a menor grado.

EJEMPLO

$3\mathbf{x^2} - 7 + 4\mathbf{x^3} + \mathbf{x^6}$

El grado más alto es 6, por lo que va primero, luego 3, 2 y al último la constante:

$\mathbf{x^6} + 4\mathbf{x^3} + 3\mathbf{x^2} - 7$

Operaciones con Polinomios

Operaciones con términos semejantes

OPERACIÓN	PROCESO	EJEMPLOS

Suma y resta	Se observa que los términos compartan la misma parte literal (variable y exponente) Se suman o restan los coeficientes y se escribe a continuación la misma parte literal.	$13x + 5x + 4x = \mathbf{22x}$ $7x + 8xy - 2x = (7x - 2x) + 8xy$ $= \mathbf{5x + 8xy}$
Multiplicación	Solo importa que los términos compartan la variable, no el exponente. Se multiplican los coeficientes y las partes literales se suman.	$6x * 4x^3 = (6*4)\ x^{1+3} = \mathbf{24x^4}$ $14x^2y * 2x = (14*2)x^{2+1}\ y$ $= 28x^3\ y$

Suma y resta de polinomios

Para sumar y restar dos polinomios, se operan los términos semejantes, es decir, aquellos que tienen las mismas variables y exponentes.

Forma Vertical

Se ordenan los polinomios y se escriben uno debajo del otro, tal que los términos semejantes queden en la misma columna.

Se reducen términos semejantes y se obtiene la suma.

Ejemplos

Dados P(x) = $\mathbf{3x^4 - 2x^2 + x + 8}$ y Q(x) = $\mathbf{x^4 + 2x^3 - x^2 + x}$.

Calcular P(x) + Q(x)

Solución

Ordenar los polinomios, uno debajo de otro según la variable.

$3x^4 \qquad -2x^2 + x + 8$

$x^4 + 2x^3 - x^2 + x$

$4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 8$

Respuesta: P(x) + Q(x) = $4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 8$

Dados P(x) = $\mathbf{3x^4 - 2x^2 + x + 8}$ y Q(x) = $\mathbf{x^4 + 2x^3 - x^2 + x}$.

Calcular P(x) – Q(x)

Solución

Se cambian los signos de Q(x)= $\mathbf{-x^4 - 2x^3 + x^2 - x}$

Ordenar los polinomios, uno debajo de otro según la variable.

$3x^4 \qquad -2x^2 + x + 8$

$-x^4 - 2x^3 + x^2 - x$

$2x^4 - 2x^3 - x^2 + 0 + 8$

Respuesta: P(x) – Q(x) = $2x^4 - 2x^3 - x^2 + 8$

Multiplicación de polinomios

En general, al multiplicar dos expresiones algebraicas, se aplica la propiedad de las potencias de igual base la ley de los coeficientes.

Monomio por polinomio

Para multiplicar polinomios, se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio y se suman o se restan los términos semejantes.

Ejemplos

Dados P(x) = $\mathbf{8x^2}$ y Q(x) = **10x - 3**.

Calcular P(x) * Q(x)

Solución

Se multiplica el monomio por todos los términos del segundo polinomio

$\mathbf{8x^2\ (10x - 3)}$

$\mathbf{=8x^2\ (10x) - 8x^2\ (3)}$

$=80x^{2+1} - 24x^2$

$=80x^3 - 24x^2$

Dados P(x) = $\mathbf{2x^3 - 3x^2 + 4x}$ y Q(x) = $\mathbf{2x^2}$.

Calcular P(x) * Q(x)

Solución

Se multiplica el monomio por todos los términos del primer polinomio

$\mathbf{2x^2\ (2x^3 - 3x^2 + 4x)}$

$=2x^2\ (2x^3) - 2x^2\ (3x^2) + 2x^2\ (4x)$

$=4x^{2+3} - 6x^{2+2} + 8x^{2+1}$

$=4x^5 - 6x^4 + 8x^3$

Polinomio por Polinomio

La multiplicación de polinomios se realiza multiplicando cada **término** del primer polinomio por cada **término** del segundo polinomio y luego se suman los términos semejantes. Esto se basa en la propiedad distributiva.

Ejemplos

1. Dados P(x) = $\mathbf{3x^2y - 2xy + 3y}$ **,** Q(x) = **xy + 2y**. Calcular P(x) * Q(x)

Solución

$$\begin{array}{r} 3x^2y - 2xy + 3y \\ xy + 2y \\ \hline \end{array}$$

$3x^3y^2 - 2x^2y^2 + 3xy^2$ Se multiplica (xy) por el primer polinomio

$6x^2y^2 - 4xy^2 + 6y^2$ Se multiplica (2y) por el primer polinomio

$3x^3y^2 + 4x^2y^2 - xy^2 + 6y^2$ Se suman términos semejantes

2. Dados P(x) = $\mathbf{8x^2y - 4y + 6z}$, Q(x) = $\mathbf{2xy + z}$. Calcular P(x) * Q(x)

Solución

$8x^2y - 4y + 6z$

$2xy + z$

$16x^3y^2 - 8xy^2 + 12xyz$ Se multiplica (2xy) por el primer polinomio

$+ 8x^2yz - 4yz + 6z^2$ Se multiplica (z) por el primer polinomio

$16x^3y^2 - 8xy^2 + 12xyz + 8x^2yz - 4yz + 6z^2$ No existen términos semejantes

PRODUCTOS NOTABLES

Producto de un monomio por un polinomio

$$\boxed{m\,(a + b - c)}$$

REGLA: El producto de un monomio por un polinomio es igual a la suma **algebraica** de los productos del **monomio** por **cada término** del polinomio. Se aplica la propiedad distributiva

$$m\,(a + b - c) = ma + mb - mc$$

Ejemplos:

a) $5q\,(m^5 - n^3 + p^2) = 5q\,(m^5) - 5q\,(n^3) + 5q\,(p^2)$

$= 5m^5q - 5n^3q + 5p^2q$

b) $2x\,(x^3 + 3x + 4) = 2x\,(x^3) + 2x(3x) + 2x\,(4)$

$= 2x^4 + 6x^2 + 8x$

c) $a^2\,(a + b - c^3) = a^2\,(a) + a^2\,(b) - a^2(c^3)$

$= a^3 + a^2b - a^2c^3$

Aplicamos la propiedad **Multiplicación de bases iguales**. - Se conserva la base y se suman los exponentes (los números pequeños)

- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4}$
  $= 2^7$

Productos Notables

Los **Productos Notables** son ciertos productos especiales, que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser obtenido por simple inspección, es decir sin realizar la multiplicación.

Binomio al cuadrado

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \pm 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2}$$

El cuadrado de la suma de un binomio

REGLA: El cuadrado de la **suma** de un binomio es igual al cuadrado del primer término **más** el doble producto del primer término por el segundo, **más (siempre más)** el segundo término al cuadrado

1er 2do

$(a+b)^2$ = (1er término)^2 + 2 (1er término) (2do término) + (2do término)^2

$= (a)^2 + 2 (a) (b) + (b)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

Ejemplo 1: (m + n)^2

1er 2do

$(m+n)^2$ = (1er término)^2 + 2 (1er término) (2do término) + (2do término)^2

$= (m)^2 + 2 (m) (n) + (n)^2$

$= m^2 + 2mn + n^2$

Ejemplo 2: $(5a + 4b3)^2$

1er 2do

$(5a + 4b^3)^2$ = (1er término)^2 + 2 (1er término) (2do término) + (2do término)^2

$= (5a)^2 + 2 (5a) (4b^3) + (4b^3)^2$

$= 25a^2 + 2mn + n^2$

Cuadrado de la diferencia de un binomio

REGLA: El cuadrado de la **diferencia** de un binomio es igual al cuadrado del primer término **menos** el doble producto del primer término por el segundo, **más (siempre más)** el segundo término al cuadrado.

1er 2do

$(a - b)^2$ = (1er término)^2 - 2 (1er término) (2do término) + (2do término)^2

$= (a)^2 - 2 (a) (b) + (b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

Ejemplo 1: $(x-y)^2$

1er 2do

$(x - y)^2$ = (1er término)^2 - 2 (1er término) (2do término) + (2do término) ^{2}

= $(x)^2$ - 2 (x) (y) + $(y)^2$

= x^2 - $2xy$ + y^2

Ejemplo 2: $(2m^3 - 4p^3)^2$

1er 2do

$(2m^3 - 4p^3)^2$= (1er término)^2 - 2 (1er término) (2do término) + (2do término) ^{2}

= $(2m^3)^2$ - 2 $(2m^3)$ $4p^3$ + $(4p^3)^2$

= $4m^6$ - $16m^3p^3$ + $16p^6$

Suma por la diferencia de dos términos

REGLA: La suma de dos términos por su diferencia es igual es igual **a la diferencia** entre el cuadrado del primer término y el cuadrado del segundo término.

Ejemplo 1

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

$(2x + 5)(2x - 5) = (2x)^2 - 5^2$

$= 4x^2 - 25$

Ejemplo 2

$(3x^4 + 4z^3)(3x^4 - 4z^3) = (3x^4)^2 - (4z^3)^2$

$= 9x^8 - 16z^6$

Producto de la forma (x ± a) (x ± b)

$$\boxed{(x \pm a)(x \pm b) = x^2 \pm cx \pm d}$$

REGLA: El producto de la forma $(x + a)(x + b)$ es igual al cuadrado del primer términoo término común**, más o menos** el producto del primer término por la suma algebraica de los segundos términos, **más o menos** el producto de los segundos términos.

Término común 2do Término común 2do

$(x \pm a)$ $(x \pm b)$ = (T. común)^2 +(T. común) (2do+2do) + (2do) (2do)

Ejemplo 1

$(\boldsymbol{x} + \mathbf{2})(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})$ = (T. común)^2 + (T. común) (2do+2do) + (2do) (2do)

= $(x)^2$ + $(x)(2+3)$ + $(2)(3)$

$= \quad x^2 + (x)(5) + 6$

$= \quad x^2 + 5x + 6$

Ejemplo 2

$(\boldsymbol{x} + 6)(\boldsymbol{x} - 8) = (\text{T. común})^2 + (\text{T. común})(\text{2do}+\text{2do}) + (\text{2do})(\text{2do})$

$= \quad (x)^2 + (x)(6-8) + (6)(-8)$

$= \quad x^2 + (x)(-2) - 48$

$= \quad x^2 - 2x - 48$

Nota: Los signos del 2do y 3er término pueden variar en el resultado debido al signo de los números no comunes o 2do término

Cubo de un binomio

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^3 = \boldsymbol{a}^3 \pm 3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2 \pm \boldsymbol{b}^3}$$

Cubo de la suma de un binomio

REGLA: El cubo de la suma de un binomio es igual al cubo del primer término **más el triple** producto del primer término al cuadrado por el segundo término **más el triple** producto del primer término por el cuadrado del segundo término, **más** el cubo del segundotérmino.

1er 2do

$(a + b)^3 = (\text{1er})^3 + 3(\text{1er})^2(\text{2do}) + 3(\text{1er})(\text{2do})^2 + (\text{2do})^3$

$= (a)^3 + 3(a)^2(b) + 3(a)(b)^2 + (b)^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ejemplo 1

1er 2do

$(m + n)^3 = (\text{1er})^3 + 3(\text{1er})^2(\text{2do}) + 3(\text{1er})(\text{2do})^2 + (\text{2do})^3$

$= (m)^3 + 3(m)^2(n) + 3(m)(n)^2 + (n)^3$

$= m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$

Ejemplo 2

1er 2do

$(x + 2y)^3 = (\text{1er})^3 + 3(\text{1er})^2(\text{2do}) + 3(\text{1er})(\text{2do})^2 + (\text{2do})^3$

$= (x)^3 + 3(x)^2(2y) + 3(x)(2y)^2 + (2y)^3$

$= x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 8y^3$

Cubo de la diferencia de un binomio

REGLA: El cubo de la suma de un binomio es igual al cubo del primer término **menos el triple** producto del primer término al cuadrado por el segundo término **más el triple** producto del primer término por el cuadrado del segundo término, **menos** el cubo del segundo término.

1er 2do

$(a-b)^3$ = (1er)^3 - 3(1er)^2 (2do) +3(1er)(2do)^2 - (2do)^3

= $(a)^3 - 3(a)^2\ (b) + 3\ (a)\ (b)^2 - (b)^3$

= $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ejemplo 1.

1er 2do

$(2x^2-3z^4)^3$ = (1er)^3 - 3(1er)^2 (2do) + 3 (1er)(2do)^2 - (2do)^3

= $(2x^2)^3 - 3\,(2x^2)^2\,(3z^4) + 3\,(2x^2)\,(3z^4)^2 - (3z^4)^3$

= $8x^6 - 3\,(4x^4)^2\,(3z^4) + 3\,(2x^2)(9z^8) - 27z^{12}$

= $8x^6 - 36\,x^4\,z^4 + 54\,x^2z^8 - 27z^{12}$

Ejemplo 2.

1er 2do

$(4y^2-6w^5)^3$ = (1er)^3 - 3(1er)^2 (2do) + 3 (1er)(2do)^2 - (2do)^3

= $(4y^2)^3 - 3\,(4y^2)^2\,(6w^5) + 3\,(4y^2)\,(6w^5)^2 - (6w^5)^3$

= $64x^6 - 3\,(16y^4)\,(6w^5) + 3\,(4y^2)(36w^{10}) - 216w^{15}$

= $64x^6 - 288\,y^4w^5 + 432\,x^2z^8 - 216w^{15}$

Trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2 \pm bx \pm c}$

Un trinomio de la forma $x^2 \pm bx \pm c$ tiene tres términos donde la constante que está en x^2 es 1.

Factorizar $x^2 - x - 6$

Para factorizar este trinomio se puede realizar aplicando los siguientes pasos:

1.- Hallar la raíz de la variable con el exponente mayor. $\sqrt{x^2} = x$

2.- Abrir dos paréntesis y colocar el resultado dentro de cada paréntesis $(x \quad)\ (x \quad)$

3.- Se tomará en cuenta los signos del ejercicio dado. El signo de la mitad se colocará en el primer paréntesis y la multiplicación del 2do y 3er signo en el 2do paréntesis.

$$(x- \quad)\ (x+ \quad)$$

4.- Hallamos dos números que multiplicados dé como resultado el tercer término y sumados o restando según los signos dé como resultado el término de la mitad. Para ello realizamos la descomposición de la constante en este caso “6” y colocamos el número mayor en el primer paréntesis

$$\begin{array}{c|c} 6 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

m.c.m= 2(3)

$(x - \quad 3\ )\ (x + \ 2 \quad)$

Proceso completo

(-)(-) = +

$$x^2 - x - 6 = (x - \mathbf{3})(x + \ \mathbf{2}\ )$$

$\sqrt{x^2}$

x

EJEMPLO 1

(-)(+) = -

$$x^2 - \mathbf{9}\,x + \ 20 = (x - \mathbf{5})(x - \ \mathbf{4}\ )$$

$\sqrt{x^2}$

x

$$\begin{array}{c|c} 20 & 2 \\ \hline 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

20= 4 * 5
20= 2 * 10

EJEMPLO 2

(+)(+) = -

$$x^2 + \mathbf{4}\,x + \ 3 = (x + \mathbf{3})(x + \ \mathbf{1}\ )$$

$\sqrt{x^2}$

x

$$\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

20= 4 * 5
20= 2 * 10

EJEMPLO 3

(+)(+) = +

$$x^2 + \mathbf{13}\,x + \ 40 = (x + \mathbf{8})(x + \ \mathbf{5}\ )$$

$\sqrt{x^2}$

x

$$\begin{array}{c|c} 40 & 2 \\ \hline 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

40= 8* 5
40= 10* 4

EJEMPLO 4

(-)(-) = +

$$x^2 - 2x - 63 = (x - 9)(x + 7)$$

$\sqrt{x^2}$

x

63	3
21	3
7	7
1	

63= 9* 7

63= 3* 21

EJEMPLO 5

(-)(-) = +

$$x^2 - 4x - 60 = (x - 10)(x + 6)$$

$\sqrt{x^2}$

x

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

60= 10* 6

60= 15* 4

60= 12* 5

Trinomio de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$

Un trinomio de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$ tiene tres términos donde la constante "a" es diferente de 1.

Factorizar $3x^2 - 5x - 2$

$$\boldsymbol{ax^2 \pm bx \pm c}$$

$$3x^2 - 5x - 2$$

Para factorizar este trinomio se puede realizar aplicando los siguientes pasos:

1.- Hallar la raíz de la variable con el exponente mayor. $\sqrt{x^2} = x$

2.- Abrir dos paréntesis y colocar el término "a" junto con el resultado dentro de cada paréntesis y se coloca una línea de fracción debajo de los paréntesis y colocamos como denominador al término "a"

$$\frac{(3x \quad)\ (3x \quad)}{3}$$

3.- Se tomará en cuenta los signos del ejercicio dado. El signo de la mitad se colocará en el primer paréntesis y la multiplicación del 2do y 3er signo en el 2do paréntesis.

$$\frac{(3x- \quad)\ (3x+ \quad)}{3}$$

4.- Hallamos dos números que multiplicados dé como resultado "c" multiplicado por "a" y sumados o restando según los signos dé como resultado el término de la mitad. Para ello realizamos la descomposición del término "a*c" es decir 6 y colocamos el número mayor en el primer paréntesis

$$\boxed{\frac{(3x - 6)\ (3x + 1)}{3}}$$

6	2
3	3
1	

m.c.m= 3*2

m.c.m = 6*1

5.- Hallar el factor común de cada paréntesis

$$\frac{(3*1x-\ 2*3\ )\ (3x+\ 1\ )}{3}$$

$$\frac{3(1x-\ 2\ )\ (3x+\ 1\ )}{3}$$

6.- Simplificamos el factor común con el denominador

$$\frac{\cancel{3}(1x-\ 2\ )\ (3x+\ 1\ )}{\cancel{3}}$$

7.- Colocamos el resultado

$$(1x-\ 2\ )\ (3x+\ 1\ )$$

EJEMPLO 1

$$5x^2+7x+\ 2=\frac{(5x+\ 5\ )\ (5x+\ 2\ )}{5}$$

5*2=10

$$=\frac{(5.1x+5.1\ )\ (5x+\ 2\ )}{5}$$

10	2
5	5
1	

$$=\frac{\cancel{5}(1x+1\ )\ (5x+\ 2\ )}{\cancel{5}}$$

$$=(1x+1\ )\ (5x+\ 2\ )$$

10= 5.2

EJEMPLO 2

$$20y^2+13x-15=\frac{(20x+\ 25\ )\ (20x-\ 12\ )}{20}$$

20*15=300

$$=\frac{(4*5x+5*5\ )\ (4*5x-\ 3*4\ )}{20}$$

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$$=\frac{\cancel{5}(4x+5\ )\ 4\ (5x-\ 3\ )}{\cancel{20}}$$

$$=(4x+5\ )\ (\cancel{5}x-\ 3\ )$$

300= 25*12

EJEMPLO 3

12*6 =72

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

72= 9* 8
72= 15* 4
72= 12* 5

$$12y^2 - x - 6 = \frac{(12x - \ 9\ )\ (12x + \ 8\ )}{12}$$

$$= \frac{(4 * 3x - 3 * 3\ )\ \ (4 * 3x + \ 2 * 4\ )}{3 * 4}$$

$$= \frac{\cancel{3}(4x - 3\ )\ \cancel{4}(3x + \ 2\ )}{3 \cancel{*} 4}$$

$$= (4x - 3\ )\ (3x + \ 2\ )$$

EJEMPLO 4

8*10 =80

80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

80= 10* 8
80= 16* 5
80= 20* 4

$$8y^2 - 2x - 10 = \frac{(8x - \ 10\ )\ (8x + \ 8\ )}{8}$$

$$= \frac{(4 * 2x - 5 * 2\ )\ \ (4 * 2x + \ 4 * 2\ )}{2 * 4}$$

$$= \frac{\cancel{2}(4x - 5\ )\cancel{4}\ \ (2x + \ 2\ )}{2 \cancel{*} 4}$$

$$= (4x - 5\ )\ (2x + \ 2\ )$$

Ecuaciones de primer grado

Una ecuación es una igualdad algebraica que se cumple solamente para determinados valores de las variables o incógnitas (las letras). Por ejemplo, la siguiente igualdad algebraica es una ecuación:

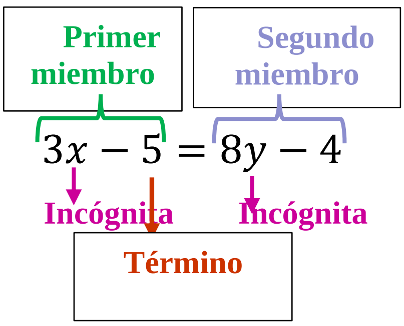
x+ 3 = 9

Elementos de una ecuación de primer grado

Miembros: son las expresiones que aparecen a cada lado del signo igual (=)

Términos: son los monomios de cada miembro

Incógnitas: También conocidas como variables, son las letras que aparecen en la ecuación.



Para resolver la ecuación procedemos a aplicar las reglas de resolución de ecuaciones.

Una ecuación tiene dos miembros, el primero y segundo. Para resolverla usamos el principio de transposición de términos.

1. Un término que está **sumando** en el miembro de una ecuación **pasa** al segundo miembro a **restar.**
2. Un término que está **restando** en el miembro de una ecuación **pasa** al segundo miembro a **sumar**.
3. Un término que está **multiplicando** en el miembro de una ecuación **pasa** al segundo miembro a **dividir**.
4. Un término que está **dividiendo** en el miembro de una ecuación **pasa** al segundo miembro a **multiplicar**.

Pasos para resolver ecuaciones de primer grado

$$\mathbf{5x - 1 = 2x - 10}$$

1.- Separar variables de constantes. Al lado derecho dejaremos las constantes

$$\mathbf{5x - 1 = 2x - 10}$$

$$\overbrace{5x - 2x}^{\text{Variables}} = \overbrace{-10 + 1}^{\text{Constantes}}$$

2.- Sumamos o restamos según sea. (Si son signos iguales se suman y se conserva el signo, pero si son de signos diferentes se restan y se conserva el signo del mayor en valor absoluto)

$$3\mathrm{x} = -9$$

3.- Despejamos a la variable en este caso "x" es decir la dejamos sola

$$\mathrm{x} = -\frac{9}{3}$$

4.- Realizamos la operación (división)

$$\mathrm{x} = -3$$

ECUACIÓN DE LA FORMA $\boldsymbol{\frac{x}{a} = b}$

En nuestra ecuación, que tiene la forma $\frac{x}{a} = b,$ pasamos el término que está dividiendo a multiplicar, Así:

$\frac{x}{2} = 32$ → x = 2 (32) → x = 64

Por lo tanto, el resultado es 64

Ejemplo

Resolver las ecuaciones

x + 8 = –9 b) 4x = –20

Solución

a) Esta ecuación es de la forma x + a = b. Pasamos el 8 con operación contraria es decir con –8.

x + 8 = –9
x = –9 – 8
x = –17

b) Esta ecuación tiene la forma ax = b. En este caso, el término a está multiplicando a la incógnita. Por lo tanto, debe pasar al otro miembro a dividir.

4x = –20; $x = -\frac{20}{2}$; x =-5

Ejemplo

Resolver la ecuación

$$(x - 3)(x + 2) - 6x = (x-1)^2 - 17$$

1.- Aplicar producto notable

$$x^2 - x - 6 - 6x = x^2 - 2x + 1 - 17$$

2.- Colocar los términos que contengan variables a la izquierda y los que no a la derecha

$$x^2 - x - 6x - x^2 + 2x = 1 - 17 + 6$$

3.- Sumar y restar términos semejantes

$$-5x = -10$$

4.- Despejar la incógnita

$$-x = -\frac{10}{5}$$

$$x = 2$$

Ejercicios resueltos

Determinar el valor de "y" en la siguiente ecuación: y – 7 = 11

Solución

Como el 7 está en el primer miembro RESTANDO, pasa al segundo miembro a SUMAR.

y = 11 + 7

y = 18

Calcular el valor de "y" en la siguiente ecuación: 3y = y – 12

Solución

Como la "y" está en el segundo miembro con signo POSITIVO, pasa al primer miembro con signo NEGATIVO.

3y – y = – 12

2y = – 12

Como el 2 está en el primer miembro MULTIPLICANDO, pasa al segundo miembro a DIVIDIR

y = – 12/2

y = – 6

Hallar el valor de la incógnita en la siguiente ecuación:

$$\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x-2}$$

Solución

Para quitar los denominadores se MULTIPLICA en cruz:

$$\frac{4}{x-1} = \frac{3}{x-2}$$

$$4(x-2) = 3(x-1)$$

Se eliminan los paréntesis aplicando la propiedad distributiva

4x – 4(2)= 3x – 3(1)

4x – 8 = 3x – 3

4x – 3x = – 3 + 8

x = 5

Traducción del lenguaje común a lenguaje algebraico en ecuaciones de primer grado.

Traducir de lenguaje común a lenguaje algebraico es una acción que inconscientemente hacemos en el día a día; por ejemplo, al deducir los diferentes gastos del día y así como planificar las compras haciendo una suposición de las variaciones de los precios.

DE LENGUAJE COMÚN A LENGUAJE ALGEBRAICO	
Lenguaje común	**Lenguaje algebraico**
Un número cualquiera	x
El doble de un número	$2x$
El triple de un número	$3x$
Un número aumentado en siete	$x+7$
Un número disminuido en tres	$x-3$
La suma de dos números cualquiera	$x+y$
La diferencia de dos números cualesquiera	$x-y$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
La tercera parte de un número	$\frac{x}{3}$
El doble de un número excedido en cinco	$2x+5$
El cuadrado de un número	x^2
El cuadrado de un número aumentado en siete	x^2+7
Tres números naturales consecutivos	$x,\ \ x+1, x+2$
La suma de tres números consecutivos	$x+(x+1)+(x+2)$

Observa cómo traducimos al lenguaje algebraico esta frase:

«El doble de un número menos 14 es igual a este mismo número más raíz de 2».

El doble de un número	Cualquier letra “2x”
Menos 14	**2x-14**
Mismo número	x
más raíz de 2	$\boldsymbol{x+\sqrt{2}}$

Escribimos lo traducido de lenguaje común a algebraico

$$2x - 14 = x + \sqrt{2}$$

Despejamos la variable, dejando variables a la izquierda y las constantes a la derecha, cambiando con el signo opuesto.

$$2x - x = \sqrt{2} + 14$$

$$x = 15{,}41$$

Ejemplos de ecuaciones de primer grado con una incógnita en ejercicios de aplicación.

¿Cuánto mide un rollo de alambre, si su tercera parte mide 80 metros?

Solución

	Cantidad
Alambre total	x
Tercera parte	x/3=80

$$\frac{x}{3} = 80$$

$$x = 80 \times 30$$

$$x = 240$$

Respuesta: el rollo de alambre mide 240 metros

Marta tiene 15 años, que es la tercera parte de la edad de su madre. ¿Qué edad tiene la madre de Marta?

Solución

	Algebraico	Valor
Edad del padre	x -7	
Edad de la madre	x	x/2 =21

$$\frac{x}{2} = 21$$

$$x = 21 \times 2$$

$x = 42$ Edad de la madre

Edad del padre: $x - 7$

$$42 - 7$$

$$= 35$$

Respuesta: el padre de Carmen tiene 35 años.

William gasta $35 en un pantalón y una camisa. Y no sabe el precio de cada prenda, pero sí sabe que la camisa vale dos terceras partes de lo que vale el pantalón. ¿Cuánto vale el pantalón?

Solución

	Algebraico
Pantalón	x
Camisa	2x/3

$$x + \frac{2x}{3} = 35$$

$$\frac{3x}{3} + \frac{2x}{3} = 35$$

$$\frac{3x + 2x}{3} = 35$$

$$\frac{5x}{3} = 35$$

$$5x = 35 \times 3$$

$$5x = 105$$

$$x = \frac{105}{5}$$

$$x = 21$$

Respuesta: el pantalón cuesta $21

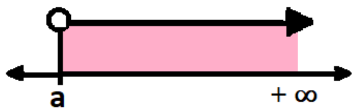
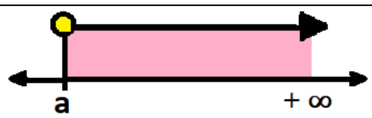
Intervalos de números reales

Los intervalos son subconjuntos de los números reales que podemos representar gráficamente en la recta numérica por un trazo o una semirrecta.

Para representarlos utilizamos una circunferencia vacía en el extremo si este no se incluye, o rellena si se incluye. Los extremos de un intervalo a y b pueden estar incluidos o no en el subconjunto definido de la recta real.

Nota: Símbolos matemáticos que se utilizan en los intervalos:

Símbolo matemático	Se lee	Se utiliza en el intervalo	Se representa en la recta numérica
>	Mayor que	( )	Circulo sin pintar ○
<	Menor que	( )	Circulo sin pintar ○
≥	Mayor que o igual a	[ ]	Circulo pintado ●
≤	Menor que o igual a	[ ]	Circulo pintado ●

	Tipo	Definición	Representación gráfica
Finitos	Abiertos	(a, b) = { x ∈ R ∣ a < x < b}	
	Cerrados	[a, b] = { x ∈ R ∣ a ≤ x ≤ b}	
	Semiabiertos	(a, b] = { x ∈ R ∣ a < x ≤ b}	
		[a, b) = { x ∈ R ∣ a ≤ x < b}	
Infinitos		(- ∞, b) = {x ∈ R ∣ x < b}	
		(- ∞, b] = {x ∈ R ∣ x ≤ b}	
		(a, + ∞) = {x ∈ R ∣ x > a}	
		[a, + ∞) = {x ∈ R ∣ x > a}	

Observemos que, si el extremo está incluido en el intervalo, lo representamos mediante un pequeño círculo pintado (●); si no está incluido, lo representamos mediante una pequeña circunferencia sin pintar (○).

Ejemplos:

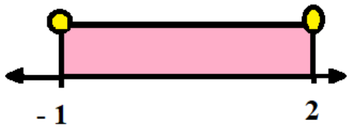
Escribamos, dibujemos y nombremos los siguientes intervalos.

a. -3 < x < 0   Abierto (-3,0)

b. -4 < x ≤ -1   Abierto por la izquierda (-4, -1]

c. $0 \leq x < 3$ Abierto por la derecha [0, 3)

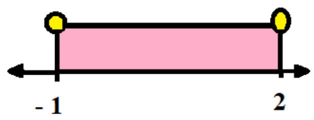
d. $-1 \leq x \leq 2$ Cerrado [-1, 2]



Escribamos en forma de intervalo y representemos en cada caso.

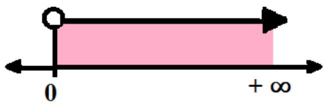
a. Números comprendidos entre -1 y 4, ambos incluidos.

[-1,4]



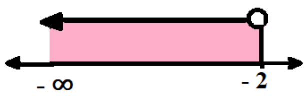
b. Números mayores que 0

$(0, \infty)$



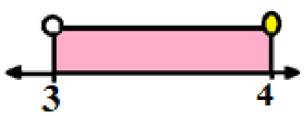
c. Números menores que -2 y el propio -2

$(-\infty, -2]$



d. Números comprendidos entre 3 y 4, incluido el 4, pero no el 3.

$(3, 4]$



Inecuaciones de primer grado

Una inecuación es una desigualdad algebraica, entre letras (incógnitas) y números relacionados por operaciones aritméticas. Su **conjunto solución** es el conjunto de números reales que la satisfacen:

Ejemplos:

$2x + y < 3$ se lee $2x + y$ ***menor que*** 3

$x + y \geq 1$ se lee $x + y$ ***es mayor o igual*** a 1

Al trabajar con números reales, utilizaremos las siguientes cuatro propiedades de los números reales.

Supóngase que **a, b** y **c** son números reales para lo cual se tiene:

Propiedades de las inecuaciones

Si en las inecuaciones a, b y c son números reales se aplican estas propiedades:

$Sí\ a < b\ y\ b < c,$	$entonces$	$a < c$
$Sí\ a < b$	$entonces$	$a + c < b + c$
$Sí\ a < b\ y\ c > 0,$	$entonces$	$a\,c < b\,c$
$Sí\ a < b\ y\ c < 0,$	$entonces$	$a\,c > b\,c$

Recuerde que al restar **d** es lo mismo que sumar **–d**, por lo que:

Sí a < b, entonces a – d < b – d

Ejemplo

2x + y < 3

x + y ≥ 1

Resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita

Ejemplos:

Ejercicio 1

Resuelve la inecuación $5(x-3) > -9$

Solución:

$$5(x-3) > -9$$

1.- Se aplica propiedad distributiva

$$5\ (x\ -\ 3) > -9$$

$$\mathbf{5x} - \mathbf{15} > -9$$

2.- Se coloca el lado izquierdo los términos con variables y al otro lado los términos sin variables.

Variables constantes

$$5x > -9 + 15$$

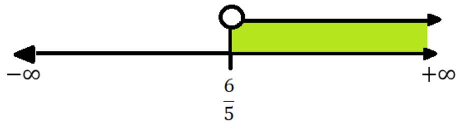
3.- Se suman o restan términos semejantes según corresponda. En este caso como -9 y +15 son signos diferentes se van a restar, conservando el signo del número mayor en valor absoluto

$$5x > 6$$

4.- Despejamos la variable (dejamos sola a X). Como el 5 está multiplicando va a pasar al otro lado haciendo la operación opuesta (dividiendo).

$$x > \frac{6}{5}$$

5.- Realizamos el respectivo gráfico.



6.- Representamos en Intervalo: $(\frac{6}{5}, +\infty)$

Ejemplo 2.

Resolver la siguiente inecuación con signo negativo

-2x + 6 > 12

1.- Se coloca el lado izquierdo los términos con variables y al otro lado los términos sin variables.

Variables constantes

-2x > 12 - 6

2.- Se suman o restan términos semejantes según corresponda. En este caso como 12 y – 6 son signos diferentes se van a restar, conservando el signo del número mayor en valor absoluto

-2x > 6

3.- Como el signo de la variable es negativo se multiplica los dos lados por (-1) por tanto, se cambia el sentido de la inecuación

(-1) - 2x < (-1) 6

2x < - 6

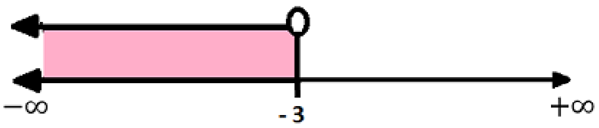
4.- Despejamos la variable (dejamos sola a X). Como el 2 está multiplicando va a pasar al otro lado haciendo la operación opuesta (dividiendo).

$x < -\frac{6}{2}$

5.- Simplificamos para 2 y el resultado final es

x < - 3

6.- Realizamos el respectivo gráfico.



7.- Representamos en Intervalo: $(-\infty, -3)$

Ejemplo 3.

Alex tiene 30 años y acaba de tener un hijo, ¿A partir de cuantos años la edad de Alex será menor que el triple de la edad del hijo?

Edad de Alex	30

Edad del hijo	0
Años que deben pasar	x

1.- Se organiza la inecuación, ya que después de cuantos años (x) de Alex (30 + x) será menor (<) que el triple de la edad del hijo. 3 (0 + x)

$30 + x < 3\ (0 + x)$

2.- Se aplica propiedad distributiva

$30 + x < 0 + 3x$

$30 + x < 3x$

3.- Se organiza términos semejantes

$X - 3x < -30$

4.- Se Resuelve términos semejantes

$-2x < -30$

5.- Como el signo de la variable es negativo se multiplica los dos lados por (-1) por tanto, se cambia el sentido de la inecuación

$(-1) - 2x < (-1) - 30$

$2x > 30$

6.- Despejamos la variable (dejamos sola a X). Como el 2 está multiplicando va a pasar al otro lado haciendo la operación opuesta (dividiendo), y simplificamos para 2

$x > \frac{30}{2}$

$x > 15$

Gráfica:

Intervalo: $(15, \infty)$

Ejemplo 4.

Resolver la siguiente inecuación.

$$\frac{4x}{3} + \frac{5}{2} \leq \frac{3x}{2} + \frac{11}{3}$$

$\frac{4x}{3} - \frac{3x}{2} \leq \frac{11}{3} - \frac{5}{2}$ Se organizan términos semejantes

$\frac{2(4x)-3(3x)}{6} \leq \frac{2(11)-3(5)}{6}$ Se busca un m.c.m. en este caso es el 6

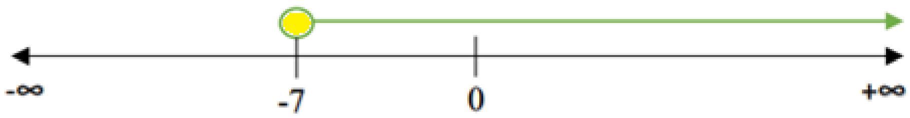
$\frac{8x-9x}{6} \leq \frac{22-15}{6}$ Se organiza términos semejantes

$\frac{-x}{6} \leq \frac{7}{6}$ Se resuelve términos semejantes

$-x \leq 7$ Se simplifica el 6 ya que se encuentra en los dos miembros.

$x \geq -7$ Se cambia el sentido de la desigualdad ya que se divide para un número negativo

Gráfica:



Intervalo: $[-7, +\infty)$

Variables estadísticas

Es interesante conocer qué clase de valor puede tomar una variable estadística, los valores pueden ser estos:

A (color preferido): rojo, azul, verde, amarillo...

B (número de goles marcados en la última jornada): 0, 1, 2, 3...

C (estatura): 1,57 m, 1,63 m, 1,594 m, 1,625 m...

Podemos darnos cuenta que tenemos dos tipos de variables estadísticas:

No numéricos como el literal (A) y numéricos como el literal (B y C), Por ello, las variables estadísticas se clasifican en cualitativas y cuantitativas.

Las variables estadísticas **cualitativas** son aquellas que no toman valores numéricos.

Tal como podemos observar en el caso A; la variable estadística es cualitativa, porque los valores no son números.

A (color preferido): rojo, azul, verde, amarillo...

Las variables estadísticas **cuantitativas** son las características de la población que se expresan de forma numérica.

De igual manera en los casos B y C, las variables estadísticas son cuantitativa, porque los valores son números.

Variable estadística cuantitativa discreta es aquella que puede asumir un número contable de valores como es el caso B.

B (número de goles marcados en la última jornada): 0, 1, 2, 3...

Ejemplo:

El número de hijos de una familia. (3)

La cantidad de dedos que tienes en la mano. (5)

El número de faltas en un partido de fútbol. (15)

Número de personas que llegan a un consultorio en una hora. (6)

Variable estadística cuantitativa continua son aquellas que pueden tomar cualquier valor. Habitualmente, esto quiere decir que puede tomar valores que no son enteros como es el caso C. Para entender de mejor manera podemos tomar del peso de una bolsa de arroz puede ser de 1,25 kg.

C (estatura): 1,57 m, 1,63 m, 1,594 m, 1,625 m...

Ejemplo:

La estatura de tu mejor amigo. (1,73)

El ancho de una pelota de fútbol. (22,1 cm)

Volumen de agua en una piscina. (37,8 m^3)

El peso de una persona. (76,5 cm)

La velocidad a la que va a un tren. (80,5 Km /h)

Población

Una **población** es un grupo o un conjunto de elementos sobre el que se hará un estudio estadístico. También es llamada universo, Por ejemplo: *Todos los árboles de un bosque*. Una **muestra** es una parte de una población que fue seleccionada para realizar un estudio. Por ejemplo: *50 de los 1.000 árboles que hay en un bosque.*

Otros ejemplos de población pueden ser:

La población de latinos que habitan en Estados Unidos

La población discapacitada de Suiza.

La población de adultos en edad avanzada de la Unión Europea.

Muestras

Imaginemos que deseamos saber cuál es el color favorito de la gente del mundo. Lo obvio sería preguntarle a cada una de las personas del planeta cuál es su color favorito y ver cuál gana en mayoría, pero imagínate realizar una encuesta a cada una de las más de siete mil millones de personas en el planeta.

Una muestra estadística es tomar una parte significativa de la población. Para ilustrar esto, imaginémonos que, en el curso de un colegio, se quiere decidir qué hacer por su paseo de fin de año. Para esto se debe presentar las opciones ante el rector del colegio para que él elija una. ¿Tiene sentido que cada estudiante de una promoción de cien estudiantes hable personalmente con el rector, y le explique su idea para el paseo? En realidad, es fácil pensar que existe una mejor solución, que ahorre tiempo a todos. Un representante de cada curso irá a hablar con el director, y así se reducirá la cantidad de personas a cuatro en vez de cien.

Estos cuatro estudiantes pueden verse como una muestra de los estudiantes en general.

Obtención de muestras

La forma ideal de obtener los datos para un estudio estadístico sería averiguar el valor que toma la variable estadística en todos y cada uno de los individuos de la población.

En los estudios estadísticos siguientes, expliquemos como efectuaríamos la recogida de datos y si conviene tomar una muestra o no. En caso afirmativo, digamos como la seleccionaríamos.

a. Si un lote de latas de pescado en conserva está en condiciones de salir a la venta o no.

b. Si un determinado modelo de auto gusta a la mayoría de ecuatorianos o no.

Descripción: Ejemplo de un auto
Fuente: Matemática 9no EGB, pág. 149

Respuesta del literal a.

Para saber si una lata en conserva está en buenas condiciones para abrirse. Por tanto, habría que seleccionar una muestra de este lote de latas, abrirlas y comprobar si se encuentra en buen estado. La muestra se podría obtener numerando las latas y efectuando un sorteo

Respuesta del literal b.

Se debería realizar una encuesta. No se podría aplicar toda la población porque es demasiado numerosa. La forma más correcta seria tomar una muestra a partir del censo. Otro modo, si no se dispone del censo, podría ser una encuesta en la calle.

Espacio muestral

El espacio muestral representa todas las formas posibles de elegir una muestra de entre una población. En el ejemplo anterior, el espacio muestral son todos los grupos de cuatro personas, conformados por una persona de cada paralelo.

Datos

Los datos son una colección de hechos que se documentan de manera numérica, con palabras, mediciones, observaciones y hasta descripciones. Existen dos tipos de datos: datos cualitativos y datos cuantitativos.

Los datos cualitativos describen alguna información. Algunos ejemplos son estos. Si una receta resulta dulce, amarga o ácida. Si los gatitos nacidos de una gata blanca son blancos, grises o negros. Si el idioma más popular es español, inglés o francés.

Por otro lado, los datos cuantitativos son datos numéricos. Estos se separan a su vez en dos categorías, datos cuantitativos discretos y datos cuantitativos continuos.

Los datos **cuantitativos discretos** son aquellos que solo pueden tener valores enteros.

Ejemplos:

- ¿Cuántos limones produce un limonero al año?
- ¿Cuántos estudiantes hay en una clase?
- ¿Cuántas visitas tiene un video?
- ¿Cantidad de libros en un anaquel?
- ¿Número de televisores en una casa?

Los datos **cuantitativos continuos** se refieren a medidas que no son necesariamente enteras:

Ejemplos:

- ¿Cuánto pesan los gatitos de una camada?
- ¿Cuál es la altura promedio en un grupo de estudiantes?
- ¿Qué velocidad tiene un auto de carreras?
- ¿Peso de una persona?
- ¿Longitud de 150 tornillos producidos en una fábrica?

El término de Espacio Muestral también es empleado en los experimentos o cálculos de probabilidades, en donde, el espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados de una **experiencia aleatoria**, lo representaremos por **E** (o bien por la letra griega **Ω**).

Ejemplo:

Espacio muestral de una moneda:

E = {Cara, Sello}.

E = {C, X}.

Espacio muestral de un dado:

E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

1. Medidas de tendencia central para datos agrupados

Son medidas estadísticas que pretenden resumir en un solo valor a un conjunto de valores.

Las medidas de tendencia central más utilizadas son: media, mediana y moda.

Medidas de tendencia Central

Nombre	Símbolo	Definición	Fórmula
Media	$\bar{x}$	Es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de estos.	$\bar{x} = \sum \frac{f_i(x_i)}{n}$ **Donde:** $\bar{x}$ media aritmética fi frecuencia absoluta xi dato n suma de frecuencias absolutas
Mediana	Me	Es el primer valor mayor o igual a la mitad del tamaño de la muestra	$M_e = L_i + \frac{A\left(\frac{n}{2} - F_{i-1}\right)}{f_i}$ **Donde:** M_e Mediana L_i Límite inferior del intervalo A Amplitud n suma de frecuencias absolutas F_{i-1} Frecuencia acumulada anterior f_i Frecuencia absoluta

Moda	Mo	Es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia absoluta.	$M_o = L_i + A\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}\right)$ **Donde:** M_o Moda L_i Límite inferior del intervalo A Amplitud f_i Frecuencia absoluta f_{i-1} Frecuencia absoluta anterior (del intervalo anterior) f_{i+1} Frecuencia absoluta posterior (del intervalo posterior)

Elaborado por: Área de Matemática EGBS

1.1 Ejercicios resueltos

Ejemplo 1: La siguiente tabla representa el número de horas trabajadas en horario laboral de un grupo de 130 obreros. Hallar la media aritmética, mediana y moda.

Intervalo Li Ls	xi	fi	Fi	xi(fi)
[55 – 60)	(55+60)/2=57.5	5	5	57.5(5)=287.5
[60 – 65)	(60+65)/2=62.5	18	5+18=23	62.5(18)=1125
[65 – 70)	(65+70)/2=67.5	20	23+20=43	67.5(20)=1350
[70 – 75)	(70+75)/2=72.5	50	43+50=93	72.5(50)=3625
[75 – 80)	(75+80)/2=77.5	17	93+17=110	77.5(17)=1317.5
[80 – 85)	(80+85)/2=82.5	16	110+16=126	82.5(16)=1320
[85 – 90)	(85+90)/2=87.5	4	126+4=130	87.5(4)=350
	Total	130		9375

Media

$\sum f_i(x_i)$ Se toma la sumatoria de la última columna

n Se toma la sumatoria de la columna **(fi)**

$$\bar{x} = \sum \frac{f_i(x_i)}{n} = \frac{9375}{130} = 72.11$$

Respuesta: la media es 72.11

Mediana

Se busca la posición de la mediana donde la respuesta es frecuencia acumulada.

$$\frac{n}{2} = \frac{130}{2} = 65$$

En la columna de frecuencia acumulada F de la tabla se busca el 65, si no hay se busca el inmediato superior que en este caso es 93

Intervalo Li Ls	xi	fi	Fi	xi(fi)
[55 – 60)	(55+60)/2=57.5	5	5	57.5(5)=287.5
[60 – 65)	(60+65)/2=62.5	18	5+18=23	62.5(18)=1125
[65 – 70)	(65+70)/2=67.5	20	23+20=43	67.5(20)=1350
[70 – 75)	(70+75)/2=72.5	50	43+50=93	72.5(50)=3625
[75 – 80)	(75+80)/2=77.5	17	93+17=110	77.5(17)=1317.5

[80 – 85)	(80+85)/2=82.5	16	110+16=126	82.5(16)=1320
[85 – 90)	(85+90)/2=87.5	4	126+4=130	87.5(4)=350
	Total	**130**		**9375**

Se utilizan los datos del intervalo seleccionado en la formula:

$$M_e = L_i + \frac{A\left(\frac{n}{2} - F_{i-1}\right)}{f_i}$$

Li = 70 Se toma del intervalo en el que se encuentra el 93. [70 – 75)

A = 5 Se calcula de la resta $A = Ls - Li = 75 - 70 = 5$

$F_{i-1} = 43$ Se obtiene del número anterior al 93

fi = 50 Se toma de la tercera columna (fi)

Todos estos datos son reemplazos en la formula:

$$M_e = L_i + \frac{A\left(\frac{n}{2} - F_{i-1}\right)}{f_i}$$

$$M_e = 70 + \frac{5(65 - 43)}{50}$$

$$M_e = 72.2$$

Respuesta: la mediana es 72.2

Moda

Para hallar la moda, se debe buscar la mayor frecuencia absoluta (fi) en la Tabla, en este caso tiene un valor de 50 que se encuentra en el intervalo de [70 – 75)

Intervalo Li Ls	xi	fi	Fi	xi(fi)
[55 – 60)	(55+60)/2=57.5	5	5	57.5(5)=287.5
[60 – 65)	(60+65)/2=62.5	18	5+18=23	62.5(18)=1125
[65 – 70)	(65+70)/2=67.5	20	23+20=43	67.5(20)=1350
[70 – 75)	(70+75)/2=72.5	50	43+50=93	72.5(50)=3625
[75 – 80)	(75+80)/2=77.5	17	93+17=110	77.5(17)=1317.5
[80 – 85)	(80+85)/2=82.5	16	110+16=126	82.5(16)=1320
[85 – 90)	(85+90)/2=87.5	4	126+4=130	87.5(4)=350
	Total	**130**		**9375**

Se utilizan los datos del intervalo seleccionado:

fi = 50 Mayor frecuencia (número que más se repite)

Li = 70 Se toma del intervalo en el que se encuentra el 93. [70 – 75)

A = 5 Se calcula de la resta $A = Ls - Li = 75 - 70 = 5$

$f_{i-1} = 20$ Se obtiene del número anterior al 50

$f_{i+1} = 17$ Se obtiene del número siguiente al 50

Todos estos datos son reemplazos en la formula:

$$M_o = L_i + A\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}\right)$$

$$M_o = 70 + 5\left(\frac{50 - 20}{(50 - 20) + (50 - 17)}\right)$$

$$M_o = 70 + 5\left(\frac{30}{30 + 33}\right)$$

$$M_o = 70 + 5\left(\frac{30}{63}\right)$$

$$M_o = 70 + 5(0.476)$$

$$M_o = 70 + 2.38$$

$$M_o = 72.38$$

Respuesta: la moda es 72.38

Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión tratan, a través del cálculo de diferentes fórmulas, de arrojar un valor numérico que ofrezca información sobre el grado de variabilidad de una variable.

El objetivo del estudio de los parámetros estadísticos es obtener información resumida del conjunto de datos en los que estamos interesados. Ya hemos resumido nuestros datos en un número, por ejemplo, la media. Pero ¿es representativo ese valor?

La dispersión es una medida que reporta cuánto se extienden los datos alrededor de un valor medio.

Como en los parámetros de centralización y de posición existen varios para medir la dispersión. Los principales son: rango, desviación media, varianza y desviación típica.

Nombre	Símbolo	Definición	Fórmula
Rango	Re	Es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de los datos.	Re = Max $\{x_i\}$ - Min $\{x_i\}$ **Donde:** Re rango Max $\{x_i\}$ valor máximo Min $\{x_i\}$ valor mínimo
Desviación media	D_M	Es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de todos los datos con respecto su media aritmética.	$D_M = \frac{\sum f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert}{N}$ **Donde:** D_M Desviación media x_i Dato $\bar{x}$ Media aritmética o promedio N Número de datos
Varianza	S^2	Es el promedio de los cuadrados de las distancias de cada marca de clase a la media	$S^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$ **Donde:** S^2 Varianza x_i Dato

			$\bar{x}$ Media aritmética o promedio N Número de datos
Desviación típica	S	Es la raíz cuadrada de la varianza, también se conoce como desviación estándar.	$S = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}}$ **Donde:** S Desviación típica o estándar x_i Dato $\bar{x}$ Media aritmética o promedio N Número de datos

EJEMPLO

Los resultados de un examen de matemática realizado a un grupo de 60 estudiantes, se muestran organizados en la siguiente tabla de frecuencias. Analizar la variabilidad de los datos.

Calificaciones	f_i
[59 – 63)	4
[63 – 67)	2
[67 – 71)	8
[71 – 75)	2
[75 – 79)	23
[79 – 83)	14
[83 – 87)	7
TOTAL	60

De acuerdo con los requerimientos de las fórmulas, se crean dos columnas, una para calcular el valor central de cada intervalo (x_i). Y otra para multiplicar ese valor por la frecuencia (x_i*f_i).

Calificaciones	x_i	f_i	$x_i\ (f_i)$
[59 – 63)	$\frac{59+63}{2} = 61$	4	61(4) = 244
[63 – 67)	$\frac{63+67}{2} = 65$	2	65 (2) =130
[67 – 71)	$\frac{67+71}{2} = 69$	8	69 (8) =552
[71 – 75)	$\frac{71+75}{2} = 73$	2	73 (2) =146
[75 – 79)	$\frac{75+79}{2} = 77$	23	77 (23) =1771
[79 – 83)	$\frac{79+83}{2} = 81$	14	81 (14) =1134
[83 – 87)	$\frac{83+87}{2} = 85$	7	85 (7) =595
TOTAL		**60**	**4572**

Se calcula la media aritmética:

$$\bar{x} = \sum \frac{f_i(x_i)}{n} = \frac{4572}{60} = 76.2$$

Se crea otra columna para calcular el valor absoluto de la diferencia entre la marca de clase y la media.

Calificaciones	x_i	f_i	$x_i\ (f_i)$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$

[59 – 63)	61	4	244	|61 – 76.2| = 15.2
[63 – 67)	65	2	130	|65–76.2| = 11.2
[67 – 71)	69	8	552	|69–76.2| = 7.2
[71 – 75)	73	2	146	|73–76.2| = 3.2
[75 – 79)	77	23	1771	|77–76.2| = 0.8
[79 – 83)	81	14	1134	|81–76.2| = 4.8
[83 – 87)	85	7	595	|85–76.2| = 8.8
TOTAL		**60**	**4572**	

Se crean columnas para registrar los otros requerimientos.

Calificaciones	x_i	f_i	$x_i (f_i)$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i \|x_i - \bar{x}\|$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
[59 – 63)	61	4	244	15.2	4 * 15.2 = 60.8	4 * $(15.2)^2$ = 924.16
[63 – 67)	65	2	130	11.2	2 * 11.2 = 22.4	2 * $(11.2)^2$ = 250.88
[67 – 71)	69	8	552	7.2	8 * 7.2 = 57.6	8 * $(7.2)^2$ = 414.72
[71 – 75)	73	2	146	3.2	2 * 3.2 = 6.4	2 * $(3.2)^2$ = 20.48
[75 – 79)	77	23	1771	0.8	23 * 0.8 = 18.4	23 * $(0.8)^2$ = 14.72
[79 – 83)	81	14	1134	4.8	14 * 4.8 = 67.2	14 * $(4.8)^2$ = 322.56
[83 – 87)	85	7	595	8.8	7 * 8.8 = 61.6	7 * $(8.8)^2$ = 542.08
TOTAL		**60**	**4572**		**294.4**	**2489.6**

Tabla final:

Calificaciones	x_i	f_i	$x_i (f_i)$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i \|x_i - \bar{x}\|$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
[59 – 63)	61	4	244	15.2	60.8	924.16
[63 – 67)	65	2	130	11.2	22.4	250.88
[67 – 71)	69	8	552	7.2	57.6	414.72
[71 – 75)	73	2	146	3.2	6.4	20.48
[75 – 79)	77	23	1771	0.8	18.4	14.72
[79 – 83)	81	14	1134	4.8	67.2	322.56
[83 – 87)	85	7	595	8.8	61.6	542.08
TOTAL		**60**	**4572**		**294.4**	**2489.6**

Rango

Es la diferencia entre el mayor valor de los datos y el menor.

La principal ventaja del rango es su fácil cálculo, aunque su valor es poco significativo, ya que sólo tiene en cuenta los dos valores extremos.

Max $\{x_i\}$ = 87   Valor mayor de todos los intervalos

Min $\{x_i\}$ = 59   Valor mínimo de todos los intervalos

Re = Max $\{x_i\}$ - Min $\{x_i\}$

Re = 87 – 59

Re = 28

Desviación Media

La desviación media es la media de la distancia de los valores de los datos (en valor absoluto) a la media.
El uso del valor absoluto es para evitar que se anulen distancias negativas con distancias positivas, lo que daría como resultado que la desviación media sea cero para cualquier distribución de datos.

$$D_M = \frac{\sum f_i|x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{294.4}{60} = 4.91$$

Varianza

$$S^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{2489.6}{60} = 41.49$$

Desviación típica

Se define a la desviación típica como la raíz cuadrada de la varianza

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

$$S = \sqrt{41.49} = 6.44$$

Triángulos y su clasificación

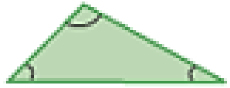
Un triángulo es una figura geométrica formada por tres segmentos de recta que se encuentran en sus extremos. Los triángulos tienen diferentes propiedades y elementos que los caracterizan.

Clasificación de los Triángulos

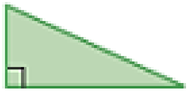
Los triángulos pueden clasificarse según la longitud de sus lados o según sus ángulos.

Segun sus ángulos

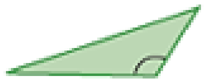
- **Acutangulo** — Es aquel que tiene tres ángulos agudos (menores a 90°)



- **Rectángulo** — Es aquel que tiene un angulo recto (igual a 90°)

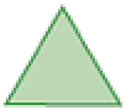


- **Obtusangulo** — Es aquel que tiene un ángulo obtuso (mayor a 90° ,pero menor a 180°)

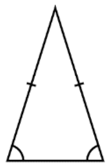


Segun sus lados

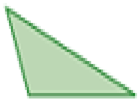
- **Equilatero** — Sus 3 lados son iguales



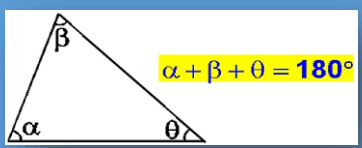
- **Isósceles** — Tiene dos lados iguales y uno desigual.



- **Escaleno** — Tiene sus tres lados desiguales

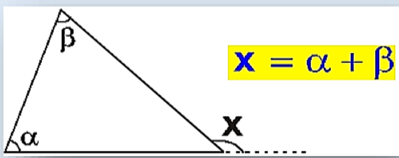


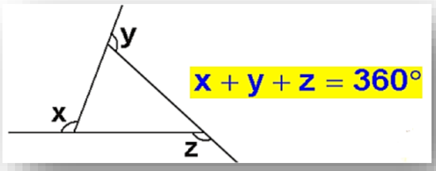
Ángulo en un triángulo



La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°o $\pi\, rad$.

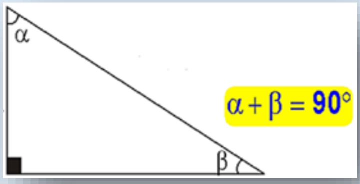
La medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes y por lo tanto mayor a cada uno de ellos.





La suma de las medidas de los ángulos externos es 360°

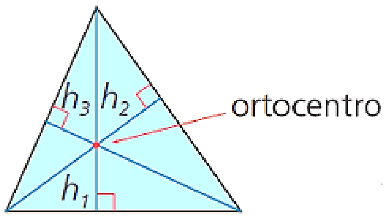
En un triángulo rectángulo (tiene un ángulo de 90°), los ángulos agudos son complementarios.

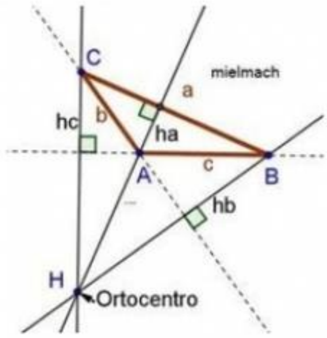


Líneas y puntos notables del triángulo.

Las líneas notables son: altura, bisectriz, mediatriz y mediana.

Altura

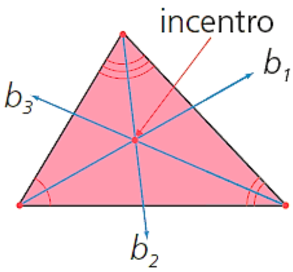




Las alturas son los segmentos perpendiculares que se trazan desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación.

Todo triángulo tiene tres alturas, el punto de intersección de las tres alturas (o sus prolongaciones) es el Ortocentro, (H).

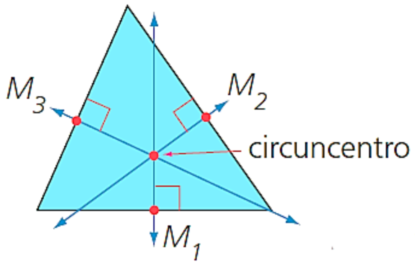
Bisectriz



Es la semirrecta que divide un ángulo interior o externo de un triángulo en dos ángulos congruentes (De igual medida).

El punto donde se cortan las tres bisectrices de un triángulo es el **Incentro, (I).** Es el centro del círculo inscrito y tangente a sus tres lados. Siempre está ubicado en la parte interna del triángulo.

Mediatriz

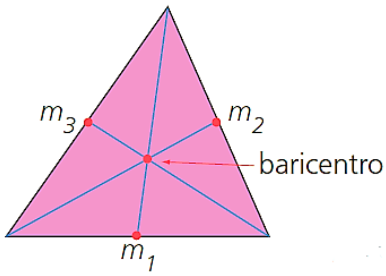


Es la recta perpendicular trazada en el punto medio de un lado del triángulo. Todo triangulo tiene tres mediatrices.

El punto donde se cortan las tres mediatrices de un triángulo es el Circuncentro, (O). Es el centro del círculo circunscrito al triángulo.

El circuncentro de un triángulo acutángulo está en la parte interna; en un triángulo rectángulo en el punto medio de la hipotenusa; y en un triángulo obtusángulo en la parte externa.

Mediana

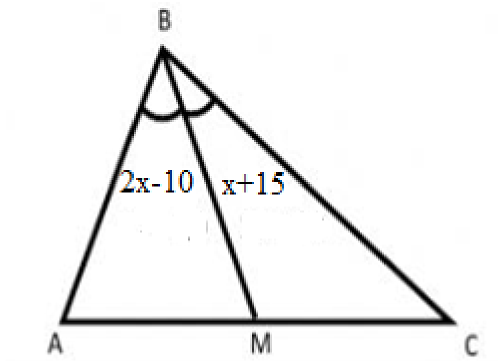


Es el segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. Todo triangulo tiene tres medianas.

El punto donde se cortan las tres medianas de un triángulo es el **baricentro, (G).** Siempre está ubicado en la parte interna del triángulo.

EJERCICIOS

1.- Halle el valor de " x" si el segmento BM es bisectriz



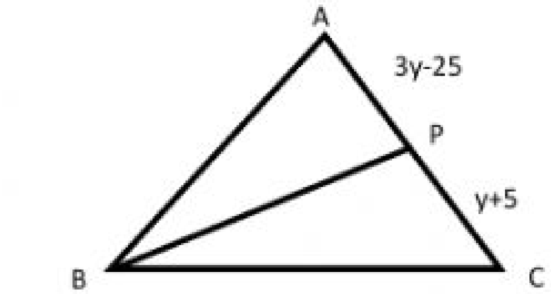
Solución

2x -10 = x+ 15

2x - x = 15 + 10

x = 25

2.- De la siguiente figura, halle el de "Y" si el segmento BP es mediana



Solución:

3 y – 25 = y + 5

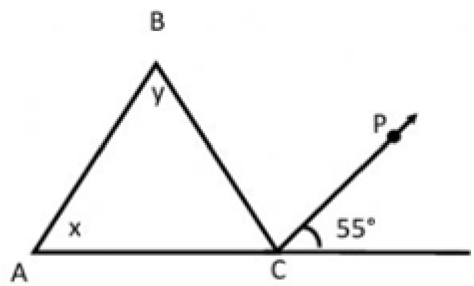
3 y – y = 25 + 5

2 y = 30

y = 30 / 2

y = 15

3.- Calcular el valor de " X + Y" si el segmento CP es bisectriz

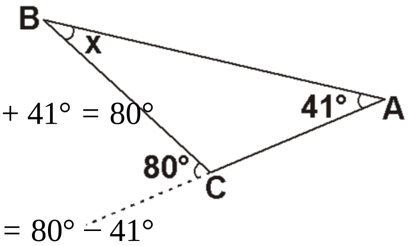


Solución:

x + y = la suma de los ángulos externos

x + y = 110°

4. Determine el valor de "x"

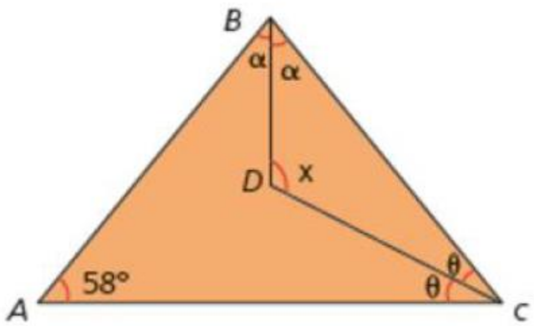


$x + 41° = 80°$

$x = 80° - 41°$

$\boldsymbol{x = 39°}$

5.- Dado el triángulo ABC hallar el valor del ángulo X



$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$ Porque la suma de los ángulos internos del triángulo es 180°

$58° + 2\sphericalangle\alpha + 2\sphericalangle\theta = 180°$ Reemplazo valores

$58° + 2(\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\theta) = 180°$ (Ec. 1)   Agrupo y factor común

En el $\Delta\, BDC$

$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\theta + \sphericalangle X = 180°$ Porque la suma de los ángulos internos del triángulo es 180°

$\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\theta = 180° - \sphericalangle X$ Se reemplaza en Ec. 1

$58° + 2(180° - \sphericalangle X) = 180°$

$58° + 360° - 2\sphericalangle X = 180°$

$-2\sphericalangle X = 180° - 58° - 360°$

$-2\sphericalangle X = -238°\ (-1)$ se multiplica para hacer positivos los valores

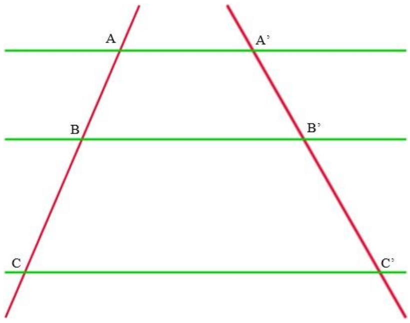
$$\sphericalangle X = \frac{238}{2} = 119°$$

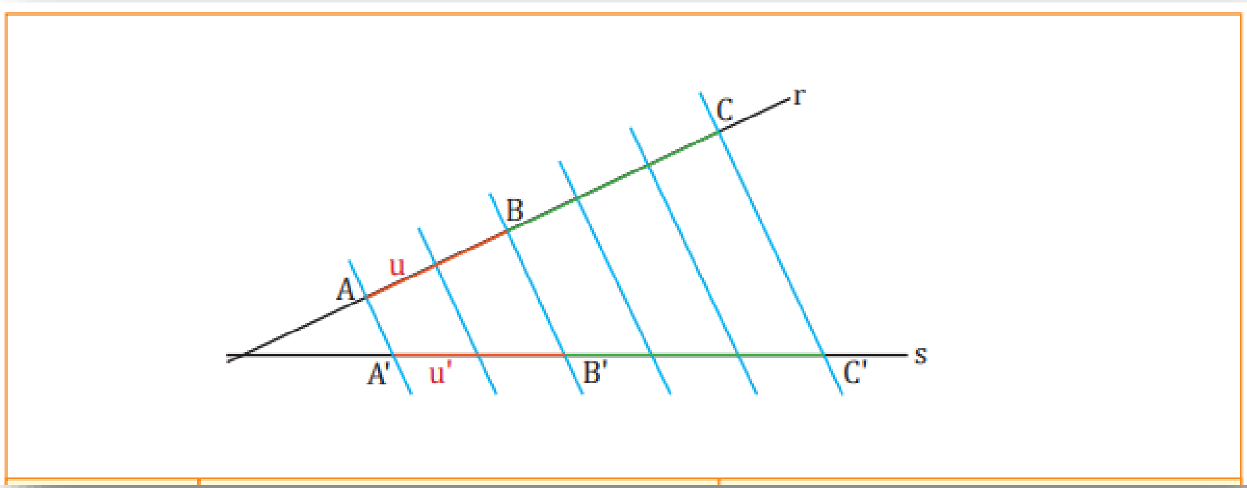
Entonces $\boldsymbol{\sphericalangle X = 119°}$

Teorema de Tales

Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$





(Prócel, María; Dominguez, Jefferson; Buitrón , Luis 2018)

Las rectas r y s son secantes.	**Seis rectas paralelas cortan r y s determinando segmentos iguales.** **La longitud de los segmentos sobre r es u. La longitud de los segmentos determinados sobre s es u'**	**Consideramos los puntos A, B y C sobre r y sus puntos correspondientes sobre s.** **Estos puntos determinan sobre r segmentos u' de distinta longitud que lo segmentos originales u.**

Vamos a comprobar que los segmentos A′B′ y B′C′ determinados sobre s son proporcionales a los segmentos AB y BC determinados sobre r:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{B'C'}$$

La longitud de cada segmento es: AB = 2u BC = 3u A' B' = 2u' B' C' = 3u' Si ahora nos fijamos en la relación entre los segmentos, obtenemos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2u}{3u} = \frac{2}{3}$$

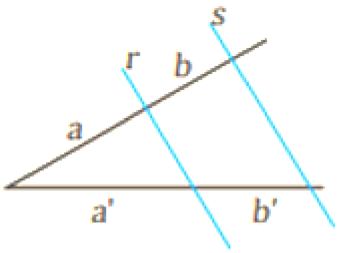
$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2u'}{3u'} = \frac{2}{3}$$

Y, por lo tanto, llegamos al resultado:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

El teorema de tales puede aplicarse también para determinar si dos rectas son paralelas o no.

Observemos la figura



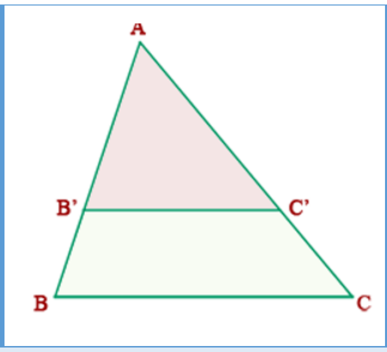
Verificamos que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Entonces las rectas r y s son paralelas

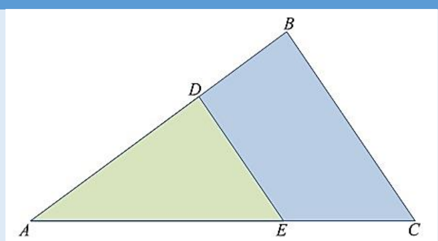
Teorema de Tales**:** Se considera el teorema fundamental de la semejanza de triángulos y establece lo siguiente: Si en un triángulo se traza una recta paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen un triángulo que es semejante al triángulo dado, lo que es lo misma se obtiene dos triángulos semejantes.

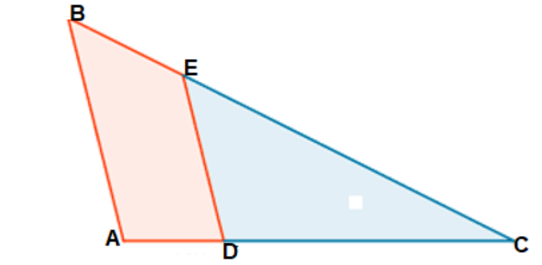
Dos triángulos están en **posición de Tales** si tienen un **ángulo común** y los lados opuestos a este ángulo son **paralelos.**



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$



	$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$

Ejercicios de Semejanza

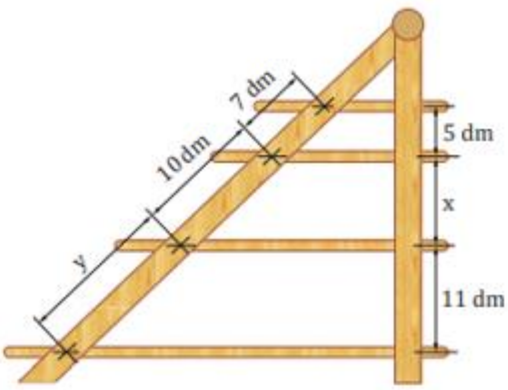
Ejercicio 1

Los peldaños de la grada representada en la figura son paralelos. Calculemos las longitudes de la grada representadas como x e y.

Si aplicamos el teorema de Tales podemos establecer las siguientes proporciones entre las diversas longitudes de la grada:

$$\frac{7}{5} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{5 * 10}{7} = \frac{50}{7} = 7,14$$

$$\frac{7}{5} = \frac{y}{11} \Rightarrow y = \frac{7 * 11}{5} = \frac{77}{5} = 15,40$$



Las longitudes de x e y son 7,14 dm y 15,40 dm respectivamente.

Ejercicio 2

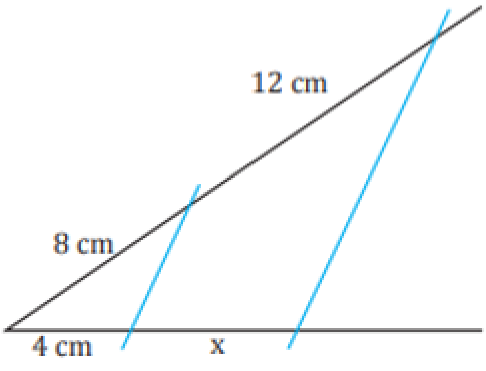
Calculemos la longitud x del segmento de la figura.

Por el teorema de Tales, sabemos que los segmentos determinados sobre dos rectas secantes por un conjunto de rectas paralelas son proporcionales.

Así pues, podemos establecer la proporción siguiente:

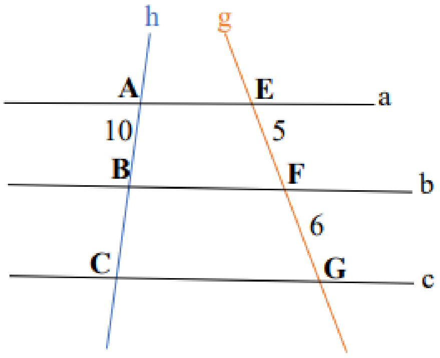
$$\frac{8}{4} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{12*4}{8} = 6$$

La longitud del segmento es **6cm.**



Ejercicio 3

Las rectas h y g están cortadas por las rectas a, b, c y d paralelas entre si Hallar $\overline{\mathbf{BC}}$



Encontremos el segmento $\overline{BC}$

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{5}{10} = \frac{6}{\overline{AC}}$$

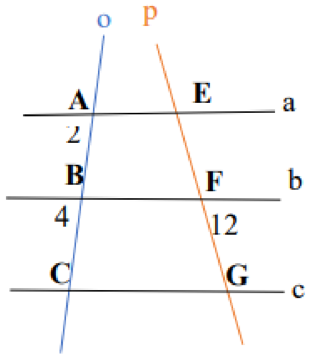
$$5 * \overline{AC} = 10 * 6$$

$$\overline{AC} = \frac{60}{5}$$

$$\overline{AC} = 12$$

Ejercicio 4

Las rectas o y p están cortadas por las rectas a, b, c y d paralelas entre si Hallar $\overline{\mathbf{EG}}$



Encontremos el segmento $\overline{EG}$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}}$$

$$\frac{4}{12} = \frac{6}{\overline{EG}}$$

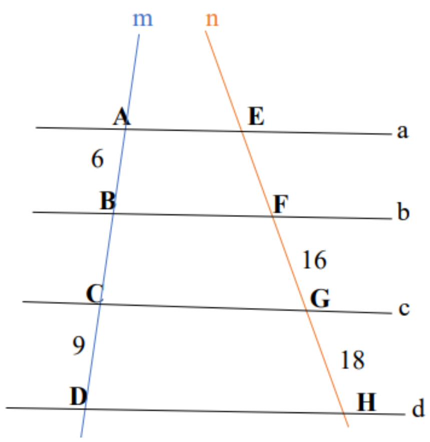
$$4 * \overline{EG} = 12 * 6$$

$$\overline{EG} = \frac{72}{4}$$

$$\overline{EG} = 18$$

Ejercicio 5

Las rectas m y n están cortadas por las rectas a, b, c y d paralelas entre si Hallar $\overline{\mathbf{BC}}$, $\overline{EG}$



Vamos a encontrar $\overline{BC}$

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{18}{9} = \frac{16}{\overline{BC}}$$

$$18 * \overline{BC} = 16 \ * 9$$

$$18 * \overline{BC} = 16 \ * 9$$

$$\overline{BC} = \frac{144}{18}$$

$$\overline{BC} = 8$$

Ahora vamos a encontrar el segmento $\overline{EG}$

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{18}{9} = \frac{\overline{AC}}{14}$$

$$18 * 14 = 9 \ * \overline{AC}$$

$$252 = 9 * \overline{AC}$$

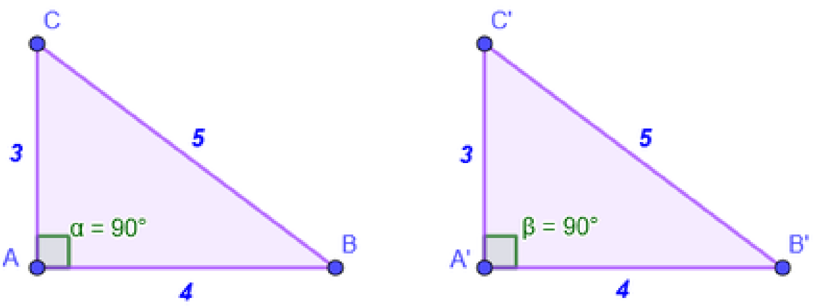
$$\frac{252}{9} = \overline{AC}$$

$$\overline{AC} = 28$$

Congruencia de triángulos

Dos o más triángulos se dice que son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Si dos triángulos son congruentes entonces los lados correspondientes son iguales y los ángulos correspondientes son iguales. En geometría a los lados correspondientes se les suele llamar lados homólogos y a los ángulos correspondientes se les dice ángulos homólogos.



Los triángulos ABC y A'B'C' son congruentes porque sus lados y ángulos correspondientes son iguales.

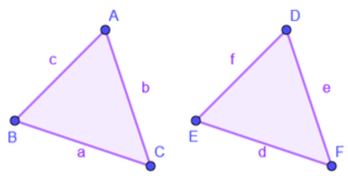
La expresión, **El triángulo ABC es congruente al triángulo A'B'C'** se escribe así:

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

Teorema de congruencia de triángulos

Teorema 1: Lado-Lado-Lado (L-L-L)

Dos triángulos son congruentes si tienen sus lados correspondientes iguales.



$\overline{AB} \cong \overline{DE}$

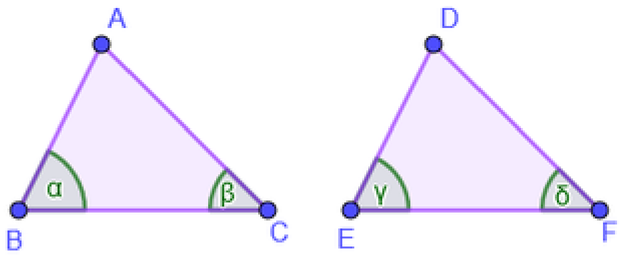
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$

$\overline{CA} \cong \overline{FD}$

Son congruentes los lados correspondientes de los triángulos, así que aplicando el criterio **LLL** concluimos que $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Teorema 2: Ángulo- Lado- Ángulo (A-L-A)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos correspondientes iguales y el lado común adyacente a ellos también es igual.



∠α ≅ ∠γ

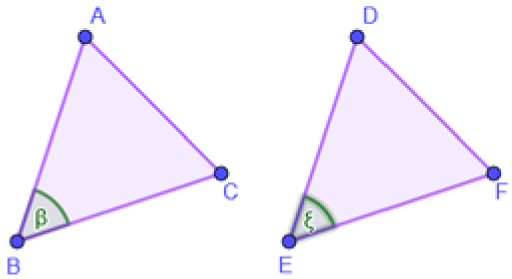
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$

∠β ≅ ∠δ

∴ΔABC ≅ ΔDEF

Teorema 3: Lado-Ángulo- Lado (L-A-L)

Dos triángulos son congruentes si dos lados correspondientes y el ángulo comprendido entre ellos son iguales.



$\overline{AB} \cong \overline{DE}$

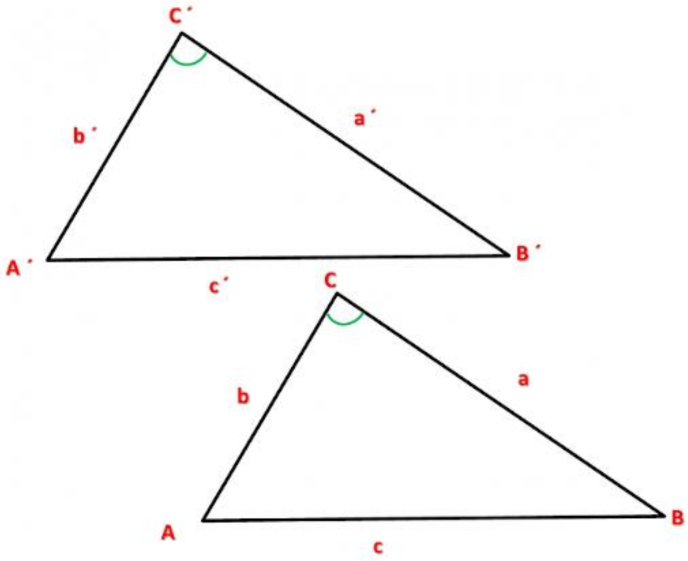
∠β ≅ ∠ε

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$

∴ΔABC ≅ ΔDEF

Teorema 4: Lado-Lado-Ángulo (LLA)

Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes y los ángulos opuestos al mayor de los lados también son congruentes. A este criterio se le conoce como lado-lado-ángulo. (LLA)



$AC \cong A'C'$

$AB \cong A'B'$

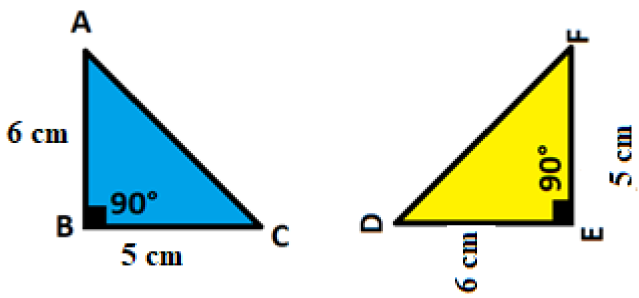
$C \cong \measuredangle C'$

Hay congruencia entre dos pares de lados entonces los ángulos que deben ser congruentes son los ángulos opuestos al mayor de los lados congruentes. De esta forma aplicando el criterio de congruencia **LLA** podemos concluir que $\Delta\ ABC \cong \Delta A'B'C'$

EJEMPLOS

Ejemplo 1.

¿Qué criterio de congruencia se determina en los dos triángulos del grafico?



Dos triángulos son congruentes si dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos son iguales

$\overline{AB} \cong \overline{D'E'}$

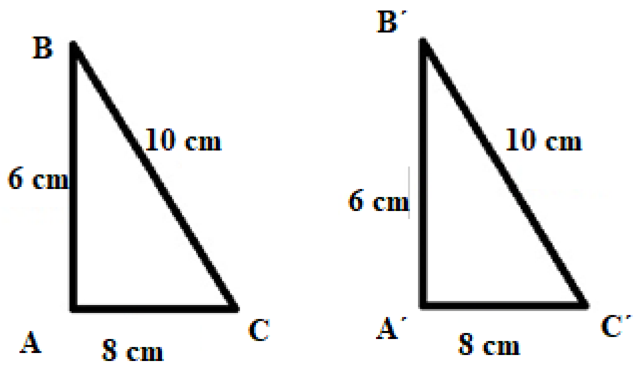
$\overline{BC} \cong \overline{E'F'}$

∠B ≅ ∠E

ΔABC ≅ ΔDEF

Ejemplo 2.

¿Qué criterio de congruencia se determina en los dos triángulos del grafico?



$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

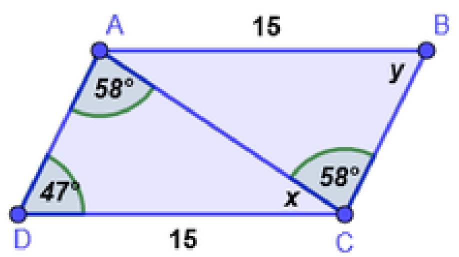
$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

ΔABC ≅ ΔA´B´C´ Teorema L−L−L

Ejemplo 3.

En la figura AB es paralela a DC. Determine si los triángulos son congruentes y cuáles son los valores de los ángulos x, y.



$\boldsymbol{\overline{AB} \cong \overline{DC}}$ Datos

∠DAC ≅ ∠BCA Datos

$\boldsymbol{\overline{AC} \cong \overline{CA}}$ Datos lado común

∠y=47° Por ser homólogo al ángulo

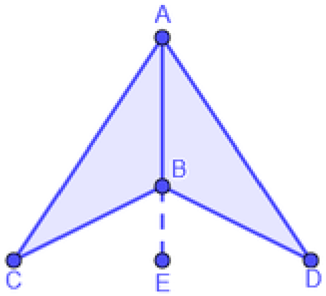
ADC ∠x=75° La suma de los ángulos internos del triángulo

∠CAB=75° Alternos internos entre paralelas

ΔADC ≅ ΔCBA Teorema A−L−A

Ejemplo 4.

En la figura AB es bisectriz del ángulo CAD, AC es congruente al segmento AD. Demuestre que AB también es bisectriz del ángulo CBD.



$\angle$CAB $\cong$ $\angle$DAB	Datos Recta biseca $\overline{AB}$ $\angle$CAD
$\overline{AC} \cong \overline{AD}$	Datos
$\overline{AB} \cong \overline{BA}$	Datos (por ser lado común)
ΔABC $\cong$ ΔABD	Por Teorema L−A−L
$\angle$ABC $\cong$ $\angle$ABD	Por ser homólogos
$\angle$CBE $\cong$ $\angle$DBE	$\angle$ABC+$\angle$CBE=$\angle$ABD+$\angle$DBE

Semejanza de triángulos

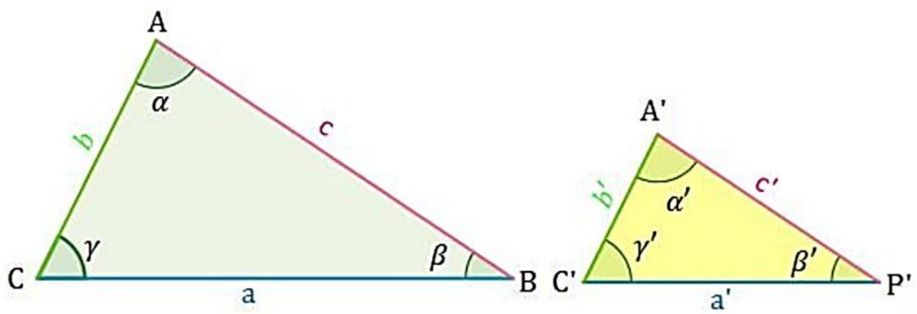
- En la definición de semejanza se tiene dos condiciones:
- Los **ángulos** correspondientes tienen que ser **congruentes** (iguales).
- Los **lados** correspondientes deben ser **proporcionales.**

A los ángulos o lados correspondientes se llaman ángulos o lados **homólogos** en la semejanza. Son lados homólogos los opuestos a ángulos iguales.

Unos lados son proporcionales a otros lados, si el cociente, o **razón**, que se obtiene de dividir cada longitud de un lado entre la longitud de su correspondiente, es siempre el mismo.

Es decir: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \cdots \ldots . = r$

Por lo que se llama **razón de semejanza r,** a la constante de proporcionalidad entre los lados homólogos de los triángulos.



En los triángulos semejantes se cumplen las condiciones siguientes:

Los lados homólogos son proporcionales:

α= α'   β = β'   ϒ= ϒ'

Los lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r$$

A r se le denomina **razón de semejanza**.

Se cumple que la razón de los perímetros de dos triángulos semejantes es también la **razón de semejanza** y que la razón de sus áreas es el **cuadrado de la razón de semejanza**:

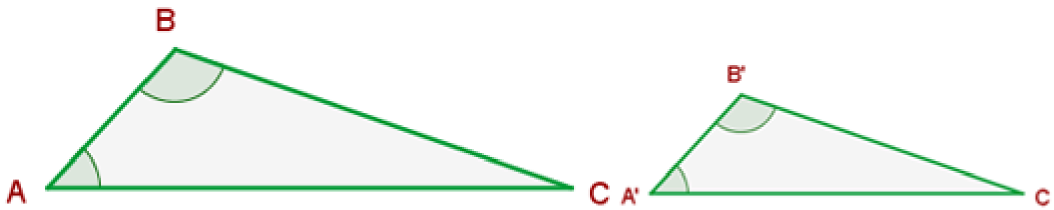
$$\frac{perímetro}{perímetro'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = r$$

$$\frac{área}{área'} = r^2$$

Para saber si dos triángulos son semejantes no es necesario conocer sus tres ángulos y sus tres lados. Existen tres criterios para asegurarlo.

Criterios de semejanza de los triángulos:

Dos triángulos son semejantes si tienen **dos ángulos iguales**. (El tercero lo será, porque los tres tienen que sumar 180°)



$$\measuredangle \boldsymbol{A} = \measuredangle \boldsymbol{A'} , \measuredangle \boldsymbol{B} = \measuredangle \boldsymbol{B'} \ o\ B = \measuredangle B', \measuredangle C = \measuredangle C' \ o \measuredangle C = \measuredangle C', \not\leq A = \measuredangle A'$$

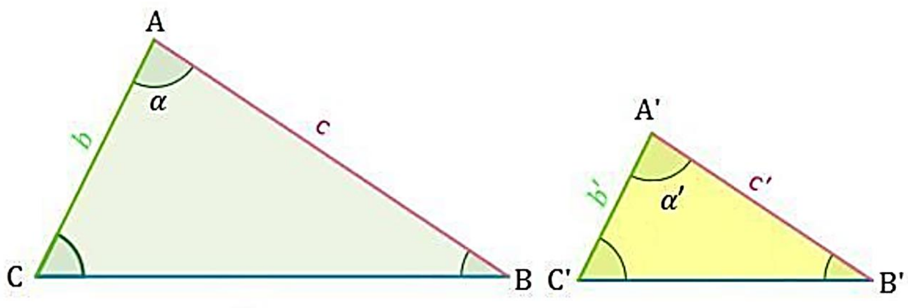
Si α = α’ y β = β’, entonces los triángulos ABC y A’B’C’ son semejantes.

Criterios de igualdad de los ángulos:

Los tres lados homólogos son paralelos. (figura superior).

Los tres lados de un triángulo son perpendiculares a los homólogos del otro triángulo

Dos triángulos son semejantes si tienen **los lados proporcionales** y el **ángulo comprendido entre ellos sea igual**.



Descripción: Semejanza de triángulos

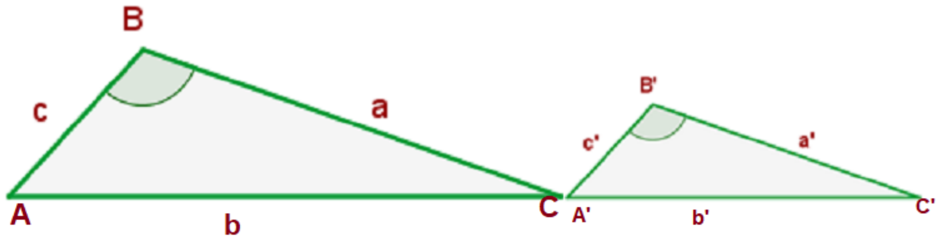
https://n9.cl/hgo8d

Entonces:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad y \quad \alpha = \alpha'$$

Y, además, α =% α', entonces los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes.

Que tengan sus **tres lados correspondientes proporcionales**. Los triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos son iguales.



Descripción; Semejanza de triángulos

https://n9.cl/1b6w0

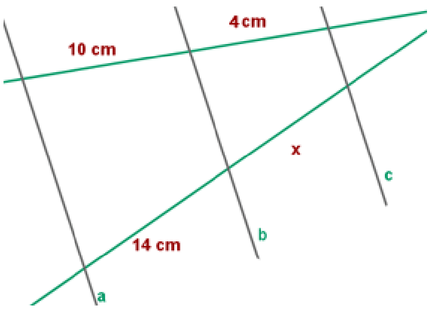
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \quad \text{y} \measuredangle A = \measuredangle A' \qquad \text{o}$$

$$\boldsymbol{\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \quad \text{y} \measuredangle B = \measuredangle B'} \qquad \text{o}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \quad \text{y} \measuredangle C = \measuredangle C' \qquad \text{o}$$

Ejercicios de semejanza

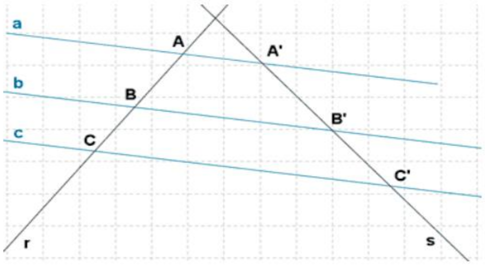
En la figura las rectas $a, b\ y\ c$ son paralelas. Hallar la longitud de x.



$$\frac{14}{x} = \frac{10}{4}$$

$$x = \frac{14 * 4}{10} = 5{,}6 \qquad \boldsymbol{x = 5{,}6\ cm}$$

Las rectas a, b y c son paralelas y sabiendo que AB = 15 cm, BC = 20 cm y A´B´= 12 cm, Hallar la longitud del segmento B´C´.



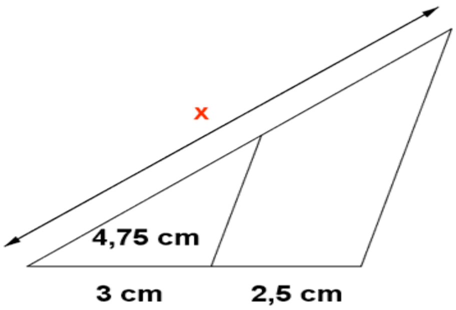
Se aplica el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A´B´}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B´C´}}$$

Se reemplaza valores $\frac{15}{12} = \frac{20}{\overline{B´C´}}$ se multiplica en cruz

B´C´ $= \frac{12*20}{15}$ = 16 cm **B´C´= 16 cm**

En la figura, hallar el valor de x.



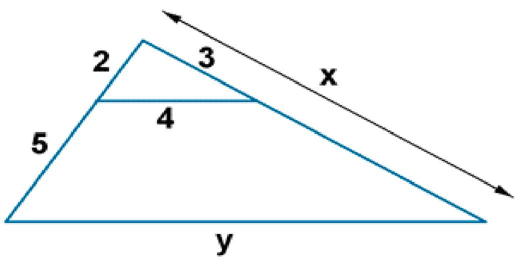
Se aplica el teorema de Tales

$\frac{x}{4,75} = \frac{5,5}{3}$ se multiplica en cruz

x $= \frac{4,75*5,5}{3}$ = 8,7 **x = 8,7 cm**

En la figura, encontrar el valor de x e y.

Se aplica el teorema de Tales.



$\frac{2}{7} = \frac{3}{x} = \frac{4}{y}$

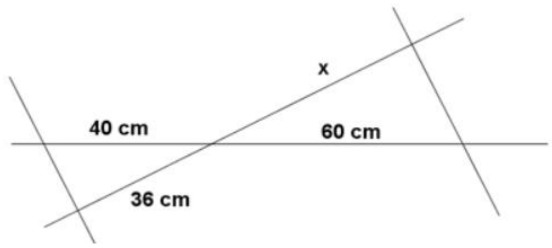
Para obtener el valor de x

$\frac{2}{7} = \frac{3}{x}$

x $= \frac{7*3}{2}$ = 10,5 **x = 10,5**

Para obtener el valor de y $\frac{2}{7} = \frac{4}{y}$ y= $\frac{7*4}{2}$ = 14 **y = 14**

En la figura, hallar el valor de x.

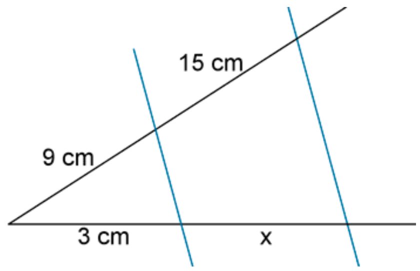


Como los triángulos son semejantes, los lados con proporcionales

$$\frac{60}{40} = \frac{x}{36}$$

x= $\frac{60*36}{40} = 54$ **x = 54 cm**

En la figura, hallar el valor de x.

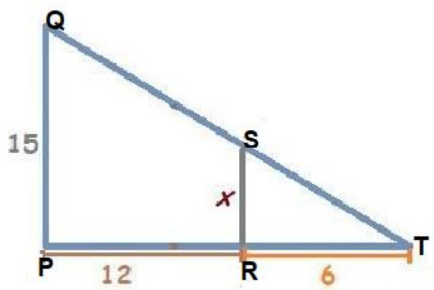


Se aplica el teorema de Tales.

$$\frac{3}{9} = \frac{x}{15}$$

x= $\frac{15*3}{9}$ = 5 **x = 5 cm**

En la figura, hallar el valor de x.



Como los triángulos son semejantes, los lados con proporcionales

$$\frac{18}{6} = \frac{15}{x}$$

x= $\frac{6*15}{18} = 5$ **x = 5 cm**

Referencias

Calvache G., Rosero T. & Yacelga M., **GEOMETRÍA PLANA Y DEL ESPACIO - DIBUJO** (Oct. 2005), Quito – Ecuador

Ministerio de Educación. (2010) Libro de Matemática 9 EGB. Ministerio de Educación. Pdf. https://librosministerio.com/matematicas-9-primaria/

Rodó, P. (29 de diciembre de 2020). Números reales. Economipedia. https://economipedia.com/definiciones/numeros-reales.html

Números reales. (30 de diciembre de 2020) Toda Materia. https://www.todamateria.com/numeros-reales/

Ministerio de Educación. (2019) Campaña de Alfabetización, Educación Básica y Bachillerato Monseñor Leonidas Proaño. Todos ABC. https://educacion.gob.ec/wp-content/uploads/downloads/2019/01/MATEMATICA-BASICA-SUPERIOR.pdf

Ortega, Joaquín M. (1993). «Potencias de base real positiva y exponente real». Introducción al análisis matemático. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona/Labor. pp. 51-54. ISBN 978-8-43353047-9. OCLC 37802457.

López Bonilla M. (2012) Potenciación y Radicación /Medellín: FUNLAM(Matemática Básica . ISBN IMPRESA: 978-958-8399-56-0 ISBN DIGITAL: 978-958-8943-12-1
https://www.funlam.edu.co/uploads/fondoeditorial/155_Potenciacion_y_radicacion.pdf
Educación.ec (2010) Potenciación libro PDF
Baldor A., ÁLGEBRA ELEMENTAL (1970), Madrid – España, EDITORIAL MEDITERRANEO

González M. O. & Mancil J. D., Álgebra Elemental Moderna. (2011), EDITORIAL ECUADOR F. B. T. Cía Ltda./LIBRESA

Arias , V., & Armendariz , C. (2019). Matemática Básica Superior. Quito, Pichincha, Ecuador: Don Bosco. Obtenido de file:///C:/Users/Olguer/OneDrive%20-%20MINEDUC/10ma%20convocatoria/10ma%20C%20Matem%C3%A1tica/Doc%20oficiales/MATEMATICA-BASICA-SUPERIOR.pdf

Quito – Ecuador, EDITORIAL ECUADOR F. B. T. Cía Ltda./LIBRESA

Rodó, P. (2020). Números reales. Economipedia. https://economipedia.com/definiciones/numeros-reales.html

Enciclopedia Económica. (2020). Intervalos. https://enciclopediaeconomica.com/intervalos/

McGRAW -HILL(2006). Algebra décima edición. Ecuaciones de primer grado. https://www.profesorenlinea.cl/matematica/Ecuaciones_primer_grado.html
Baldor A., ÁLGEBRA ELEMENTAL (1970), Madrid – España, EDITORIAL MEDITERRANEO

González M. O. & Mancil J. D., Álgebra Elemental Moderna – Vol. I (1962 - 2011), Quito – Ecuador, EDITORIAL ECUADOR F. B. T. Cía Ltda./LIBRESA

Ministerio de Educación. (2010) Libro de Matemática 9 EGB. Ministerio de Educación. Pdf. https://librosministerio.com/matematicas-9-primaria/

Rodó, P. (29 de diciembre de 2020). Números reales. Economipedia. https://economipedia.com/definiciones/numeros-reales.html

Números reales. Toda Materia. https://www.todamateria.com/numeros-reales/

Enciclopedia Económica. (30 de diciembre de 2020). Intervalos. https://enciclopediaeconomica.com/intervalos/

Prócel, María; Dominguez, Jefferson; Buitrón , Luis. Matemática 9no EGB. Quito: Medios Públicos EP, 2018.

González M. O. & Mancil J. D., Álgebra Elemental Moderna – Vol. I (1962 - 2011), Quito – Ecuador, EDITORIAL ECUADOR F. B. T. Cía Ltda./LIBRESA

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS. Recuperado: https://geometriapdf.blogspot.com/2018/11/congruencia-triangulos-ejercicios.html

Teorema de Tales de Mileto. Recuperado: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/geometria/basica/teorema-de-thales.html

Castro, J. (s.f.). Congruencia de triángulos. https://jcastrom.jimdofree.com/matematica/geometr%C3%ADa/congruencia-de-tri%C3%A1ngulos/

Khan Academy. (2023). Repaso de congruencia de triángulos. https://es.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-congruence/xff63fac4:hs-geo-congruent-triangles/a/triangle-congruence-review